TELECOLLE PERTUS Charlotte
Enoncé

Exercice 01

On pose : $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer a pour que $U = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de A.
3. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, trouver deux réels b et c tels que $AV = bU + cV$.
4. Trouver la matrice $B = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En déduire B^{2018} et A^{2018}.

Indications :
1. On calcule rapidement le polynôme caractéristique et on peut conclure.
2. On a trouvé (normalement) une seule valeur propre λ et on détermine une base de $E_\lambda(A)$. Il faut que U soit colinéaire à ce vecteur de base ce qui doit donner une seule valeur de a.
3. On connait U, on connait V, on connait AV et donc on calcule b et c par identification.
4. On remarque que B a la forme $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où α est à trouver. On utilise $PB = AP$.
Pour le calcul de B^n, on calcule B^2, , B^3 puis on devine et on fait une récurrence. On prend alors $n = 2018$. Pour A^{2018}, on utilise $A^{2018} = PB^{2018}P^{-1}$, à calculer si vous avez le temps seulement (on donnera le résultat dans le corrigé).

Exercice 02

1. Montrer que la suite de terme général
$$w_n = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$$
est bornée et que tous ses termes de rang impairs sont nuls.
2. En déduire la parité de $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n z^n$ et minorer son rayon de convergence.
3. ***Supplément au cas où il reste du temps*** :
Montrer que (w_{2n}) est une suite décroissante et que $w_{2n+2} + w_{2n} = \dfrac{2}{2n+1}$.

Indications :
1. Pour montrer que (w_n) est bornée, on pourra montrer et utiliser : $|\tan t| \leqslant 1$ pour $t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Puis, pour montrer que w_{2n+1} est nul, on utilise Michel de Chasles :
$$w_{2n+1} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^{2n+1} t \, dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t \, dt$$
puis, on fait le bon changement de variable dans la première intégrale.
2. Pour la parité, on remarquera que $f(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} w_{2p} z^{2p}$ et pour minorer son rayon de convergence, on remarquera que $|f(z)| \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} |w_{2p}||z|^{2p}$ et on utilisera le majorant de $|w_{2p}|$ trouvé à la première question.
3. Pour le supplément, on écrit $w_{2n+2} - w_{2n}$ sous forme d'une intégrale, puis on montrera que ce qui est dans l'intégrale est positif. Pour le calcul de $w_{2n+2} + w_{2n}$, on l'écrit aussi sous forme d'une intégrale et on remarquera que $\tan^{2n+2} t + \tan^{2n} t = \tan^{2n} t(1 + \tan^2 t)$ et que $1 + \tan^2 t$ est la dérivée de $\tan t$.

Correction

Exercice 01

On pose : $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?

On calcule rapidement le polynôme caractéristique : $\chi_A(t) = (t-1)^2$.
Si A est diagonalisable alors A est semblable à I_2 donc $A = I_2$. Or on voit que $A \neq I_2$. Donc c'est absurde et A n'est pas diagonalisable.

Déterminons a pour que $U = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de A.

Pour faire cela, on a trouvé une seule valeur propre $\lambda = 1$ et déterminons une base de $E_\lambda(A)$. Il faut que U soit colinéaire à ce vecteur de base ce qui doit donner une seule valeur de a.
Donc, en avant : si l'on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x - 12y \\ 3x - 5y \end{pmatrix}.$$

On trouve : $x = 2y$ et donc le vecteur $(2, 1)$ est une base de $E_1(A)$.

$$\text{On trouve } a = 2.$$

3. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, trouvons deux réels b et c tels que $AV = bU + cV$.

On a :

$$AV = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + cU = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve : $b = 3$ et $c = 1$. Donc :

$$AV = 3U + V.$$

4. Trouvons la matrice $B = P^{-1}AP$ avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que B a la forme $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où α est à trouver. En effet, U est un vecteur propre associé à 1 et comme 1 est la seule valeur propre, on a bien la forme indiquée.
On utilise $PB = AP$. On écrit :

$$PB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = AP = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve en identifiant $\alpha = 3$. Donc : $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule les premières puissances de B.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on sent que : $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a bien entendu l'initialisation et pour l'hérédité,

$$B^{n+1} = B^n B = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est ok. Il reste à calculer $PB^{2018}P^{-1}$ avec $B^{2018} = \begin{pmatrix} 1 & 6054 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et :

$$A^{2018} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 6054 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12109 & -24216 \\ 6054 & -12107 \end{pmatrix}.$$

Exercice 02

1. Montrons que la suite de terme général :

$$w_n = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$$

est bornée.
Pour montrer que (w_n) est bornée, utilisons : $|\tan t| \leqslant 1$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.
On a alors :

$$|w_n| \leqslant \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\tan^n t| \, dt \leqslant \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Montrons que tous ses termes de rang impairs sont nuls.
Pour montrer que w_{2n+1} est nul, on utilise Michel de Chasles :

$$w_{2n+1} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^{2n+1} t \, dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t \, dt$$

puis, on fait le bon changement de variable dans la première intégrale qui est $t = -u$. On a :

$$w_{2n+1} = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \tan^{2n+1}(-u) \, (-du) + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t \, dt$$

Soit :

$$w_{2n+1} = -\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} u \, du + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t \, dt = 0.$$

2. Déduisons en la parité de $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n z^n$.
Comme les termes w_{2p+1} sont nuls pour tout entier p, il reste :

$$f(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} w_{2p} z^{2p}.$$

Puis $f(-z) = \sum_{p=1}^{+\infty} w_{2p}(-z)^{2p} = f(z)$ car $z^{2p} = (-z)^{2p}$.
On va minorer le rayon de convergence de cette série.
Remarquons que $|f(z)| \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} |w_{2p}||z|^{2p}$.
Puis, on utilise le majorant de $|w_{2p}|$ trouvé à la première question :

$$|f(z)| \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} |w_{2p}||z|^{2p} \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2} \times |z|^{2p}.$$

Or $\sum_{p=1}^{+\infty} |z|^{2p}$ est une série géométrique convergente pour $|z| < 1$. On a alors :

$$|f(z)| \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} |z|^{2p},$$

ce qui donne :

$$|f(z)| \leqslant \frac{\pi}{2} |z|^2 \frac{1}{1-|z|^2}.$$

Donc si $|z| < 1$, $|f(z)|$ est borné et la série converge donc :

Le rayon de convergence de $\sum_{p \geqslant 1} w_{2p} z^{2p}$ est minoré par 1.

3. ***Supplément au cas où il reste du temps*** :
Montrons que (w_{2n}) est une suite décroissante.

Ecrivons $w_{2n+2} - w_{2n}$ sous la forme d'une intégrale :

$$w_{2n+2} - w_{2n} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^{2n+2} t - \tan^{2n} t\right) \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t \left(\tan^2 t - 1\right) \, dt.$$

Comme $\tan^{2n} t > 0$ et $\tan^2 t - 1 < 0$, alors $\tan^{2n} t \left(\tan^2 t - 1\right) < 0$.
On a bien : $w_{2n+2} - w_{2n} < 0$.

Montrons que : $w_{2n+2} + w_{2n} = \dfrac{2}{2n+1}$.

$$w_{2n+2} + w_{2n} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^{2n+2} t + \tan^{2n} t\right) \, dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t \left(\tan^2 t + 1\right) \, dt,$$

en remarquant que $\tan^{2n+2} t + \tan^{2n} t = \tan^{2n} t(1 + \tan^2 t)$ et comme $1 + \tan^2 t$ est la dérivée de $\tan t$, il reste à poser le changement de variable : $x = \tan t$ donc $dx = \left(\tan^2 t + 1\right) \, dt$. Alors :

$$w_{2n+2} + w_{2n} = \int_{-1}^{1} x^{2n} \, dx = \frac{2}{2n+1}.$$