TELECOLLE MOLS
Enoncé

Exercice 01

On pose $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$ pour $n \geqslant 2$.

1. Montrer : $\forall k \geqslant 3,\ u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leqslant u_{k-1}$.
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} u_n$.

Indications : 1. On sait que si f est une fonction décroissante et strictement positive alors : $\forall k \geqslant 3,\ f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leqslant f(k-1)$.
2. On sommera la double inégalité de la question précédente pour k allant de 3 à N.
Puis, on calculera l'intégrale : $\displaystyle\int_{2}^{N} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}}$ avec le changement de variable $x = 1/t$.
Puis on fera tendre N vers$+\infty$.

Exercice 02

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A_α est scindé sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 1$.
3. ***En Supplément : à faire que s'il reste du temps***. On note $B = A_1$. Montrer : $\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que B soit semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

   En déduire la valeur de c.

Indications : 1. On trouvera trois valeurs propres (l'une d'entre elle est 1). On pourra vérifier que la trace est bien la somme des trois valeurs propres trouvées.
2. On sait que si A a trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. Par contre, on n'a pas la réciproque.

Correction