TELECOLLE FAURE
Enoncé

Exercice 01

1. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on donne $P(X=i, Y=j) = a\,\dfrac{ij}{n^2(n+1)^2}$.
   Déterminer la valeur de a et trouver les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Indications : 1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(X=i,\, Y=j) = 1$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Par ailleurs, par exemple, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(X=i,\, Y=j)$.

2. On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 02

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

1. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}^\star$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et donner sa dérivée ainsi que sa monotonie.
3. En encadrant e^t entre $[x, 2x]$ ou sur $[2x, x]$, déterminer les limites de F aux bornes de son domaine et construire son tableau de variations.

Indications : 1. On sait qu'une fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.
2. Si l'on suppose par exemple $x > 0$, on a :
$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt = \int_1^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt + \int_x^{1} \frac{e^t}{t}\,dt.$$
De plus si ϕ est dérivable, $\left(\displaystyle\int_a^{\phi(x)} f(t)\,dt\right)' = \phi'(x) f(\phi(x))$.
3. On sépare le cas $x > 0$ et le cas $x < 0$ puis on crée une double inégalité qui encadre $F(x)$ par deux quantités qui tendent vers la même limite quand x tend vers 0.