TELECOLLE HASHIM
Enoncé

Exercice 01

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle, $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire et $\wedge$ le produit vectoriel. Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 1 et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(\vec{x} + \langle\vec{x},\, \vec{u}\rangle\vec{u} + \sqrt{3}\,\vec{u}\wedge\vec{x}\right).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier que l'on peut compléter $\vec{u}$ en $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v},\, \vec{w})$ en base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
3. Préciser la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et reconnaître f.
4. On suppose que $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Préciser la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Indications : 1. Il suffit de vérifier la linéarité de f, c'est-à-dire :
Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbf{R}^3$ et tout $a \in \mathbf{R}$, $f(\vec{x} + a\vec{y}) = f(\vec{x}) + af(\vec{y})$.
2. Citer un résultat du cours.
3. On doit écrire $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ et $f(\vec{w})$ sous forme de combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Puis on a alors les colonnes de la matrice cherchée. On rappelle au passage que $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w}$.
4. On pose $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ puis on calcule les coordonnées de $f(\vec{x})$. On en déduit alors la matrice cherchée. Attention, utiliser la matrice de **3.** et donc introduire une matrice de passage P serait maladroit car il faudrait trouver $\vec{v}$ et $\vec{w}$ puis inverser P. Trop long.

Exercice 02

Déterminer la nature de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$.
Montrer ensuite que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$. Conclure.

Indications : Pour la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$, on pourra utiliser $|\sin u| \leqslant 1$.
Puis, on part de $\displaystyle\int_u^{v} \frac{\sin t}{t}\, dt$ et on fait une intégration par parties en prenant $t \mapsto 1 - \cos t$ pour primitive de $t \mapsto \sin t$. On fera ensuite tendre u vers 0 et v vers $+\infty$.