TELECOLLE JEANSON
Enoncé

Exercice 01

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2y'(x) + (1-\alpha^2)y(x) = e^x.$$

Indications : On commence par résoudre l'équation homogène. On pose alors l'équation caractéristique : $X^2 - 2X + 1 - \alpha^2 = 0$. On détermine ses racines en fonction de son discriminant Δ, selon qu'il est > 0, $= 0$ ou < 0. Puis, on cherche une solution particulière y_p de l'équation complète. Comme le second membre est $x \mapsto e^x$, on rappele que si 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution $y_p(x) = a\,e^x$, où $a \in \mathbf{R}$, si 1 est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution $y_p(x) = a\,x\,e^x$, où $a \in \mathbf{R}$, si 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution $y_p(x) = a\,x^2\,e^x$, où $a \in \mathbf{R}$,

---

Exercice 02

Soit X une *v.a.r.d* telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi de probabilité f vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ f(n) = \frac{4}{n} f(n-1).$$

Déterminer cette loi.

Indications : On écrit donc $f(n)$ en fonction de $f(n-1)$ puis on écrit $f(n-1)$ en fonction de $f(n-2)$ puis $f(n-2)$ en fonction de $f(n-3)$ etc jusqu'à $f(1)$ en fonction de $f(0)$. Puis on fait le produit de toutes les égalités. On en déduit $f(n)$ en fonction de $f(0)$. On peut conclure.

Correction

Exercice 01

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation différentielle :

$$y''(x) - 2y'(x) + (1-\alpha^2)y(x) = e^x.$$

• On commence par résoudre l'équation homogène. On pose alors l'équation caractéristique :

$$X^2 - 2X + 1 - \alpha^2 = 0.$$

Déterminons ses racines en fonction de son discriminant Δ, selon qu'il est > 0, $= 0$ ou < 0.
On a :

$$\Delta = 4 - 4(1-\alpha^2) = 4\alpha^2.$$

Si $\alpha = 0$, ce qui signifie $\Delta = 0$ alors 1 est racine double et l'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto e^x(\lambda + \mu x),\ (\lambda,\ \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

Si $\alpha \neq 0$, ce qui signifie $\Delta > 0$ alors les racines de l'équation caractéristique sont

$$\frac{2 \pm 2\alpha}{2} = 1 \pm \alpha.$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto \lambda\, e^{(1+\alpha)x} + \mu\, e^{(1-\alpha)x},\ (\lambda,\ \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

• Recherche d'une solution particulière y_p de l'équation complète.
Si $\alpha = 0$, comme 1 est racine double de l'équation caractéristique, on cherche une solution $y_p(x) = a\, x^2\, e^x$, où $a \in \mathbf{R}$.
On dérive deux fois y_p :

$$y_p(x) = a\, x^2\, e^x,\ y_p'(x) = (2ax + ax^2)\, e^x,\ y_p''(x) = (2a + 4ax + ax^2)\, e^x.$$

On remplace dans $y''(x) - 2y'(x) + (1-\alpha^2)y(x)$ qui est ici $y''(x) - 2y'(x) + y(x)$ et on obtient comme seul terme :

$$2a\, e^x.$$

Comme le second membre est e^x, on a : $a = \dfrac{1}{2}$.
Bilan : l'ensemble des solutions de l'équation complète est :

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto e^x(\lambda + \mu x) + \frac{1}{2}e^x\ (\lambda,\ \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

Si $\alpha \neq 0$, comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution $y_p(x) = b\, e^x$, où $b \in \mathbf{R}$.
On dérive deux fois y_p :

$$y_p(x) = b\, e^x = y_p'(x) = y_p''(x).$$

On remplace dans $y''(x) - 2y'(x) + (1-\alpha^2)y(x)$ et on obtient comme seul terme :

$$-\alpha^2 b\, e^x.$$

Comme le second membre est e^x, on a : $b = \dfrac{-1}{\alpha^2}$.
Bilan : l'ensemble des solutions de l'équation complète est :

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \lambda\, e^{(1+\alpha)x} + \mu\, e^{(1-\alpha)x} - \frac{1}{\alpha^2}e^x\ (\lambda,\ \mu) \in \mathbf{R}^2\}$$

Exercice 02

Soit X une *v.a.r.d* telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi de probabilité f vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\star},\ f(n) = \frac{4}{n} f(n-1).$$

Déterminons cette loi, c'est-à-dire déterminons $f(n)$ en fonction de n.
On écrit alors $f(n)$ en fonction de $f(n-1)$ puis on écrit $f(n-1)$ en fonction de $f(n-2)$ puis $f(n-2)$ en fonction de $f(n-3)$ etc jusqu'à $f(1)$ en fonction de $f(0)$. On a :

$$\left\{\begin{array}{ccc} f(n) & = & \dfrac{4}{n} f(n-1) \\ f(n-1) & = & \dfrac{4}{n-1} f(n-2) \\ f(n-2) & = & \dfrac{4}{n-2} f(n-3) \\ . & = & . \\ . & = & . \\ f(1) & = & \dfrac{4}{1} f(0) \end{array}\right. .$$

Puis on fait le produit de toutes les égalités :

$$f(n) \times f(n-1) \times ... \times f(1) = \frac{4}{n} \times \frac{4}{n-1} \times \frac{4}{n-2} \times ... \times \frac{4}{1} \times f(n-1) \times ... \times f(1) \times f(0).$$

Il reste : $f(n) = \dfrac{4^n}{n!} f(0)$.
Puis, on sait que la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} f(0) = 1.$$

On reconnait le D.S.E de e^4 et donc : $e^4 f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = e^{-4}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f(n) = e^{-4} \frac{4^n}{n!}.$$

On reconnaît la loi de Poisson de paramètre 4.