TELECOLLE MOLS
Enoncé

Exercice 01

On pose $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$ pour $n \geqslant 2$.

1. Montrer : $\forall k \geqslant 3,\ u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leqslant u_{k-1}$.
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} u_n$.

Indications : 1. On sait que si f est une fonction décroissante et strictement positive alors : $\forall k \geqslant 3,\ f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leqslant f(k-1)$.
2. On sommera la double inégalité de la question précédente pour k allant de 3 à N.
Puis, on calculera l'intégrale : $\displaystyle\int_{2}^{N} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}}$ avec le changement de variable $x = 1/t$.
Puis on fera tendre N vers$+\infty$.

Exercice 02

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A_α est scindé sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 1$.
3. ***En Supplément : à faire que s'il reste du temps***. On note $B = A_1$. Montrer : $\exists\,(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que B soit semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

   En déduire la valeur de c.

Indications : 1. On trouvera trois valeurs propres (l'une d'entre elle est 1). On pourra vérifier que la trace est bien la somme des trois valeurs propres trouvées.
2. On sait que si A a trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. Par contre, on n'a pas la réciproque.

Correction

Exercice 01

On pose $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{3/2}}$ pour $n \geqslant 2$.

1. Montrons : $\forall k \geqslant 3,\ u_k \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leqslant u_{k-1}$.

Nous allons paraphraser l'indication (ce qui n'a rien de choquant).
On sait que si f est une fonction décroissante et strictement positive alors :

$$\forall k \geqslant 3,\ f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leqslant f(k-1).$$

Il suffit de prendre $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^{3/2}}$, cette fonction est visiblement décroissante et positive. Or $f(k) = u_k$ et $f(k-1) = u_{k-1}$.

2. On va en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$.

Sommons la double inégalité de la question précédente pour k allant de 3 à N :

$$\sum_{k=3}^{N} u_k \leqslant \sum_{k=3}^{N} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leqslant \sum_{k=3}^{N} u_{k-1}.$$

Cela s'arrange, en utilisant Michel de Chasles et un glissement d'indice dans la dernière somme :

$$\sum_{k=3}^{N} u_k \leqslant \int_{2}^{N} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} \leqslant \sum_{k=2}^{N-1} u_k.$$

Puis, on intègre $\displaystyle\int_{2}^{N} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}}$. C'est possible avec le changement de variable $x = \ln t$ et donc $dx = \dfrac{dt}{t}$.
On a :

$$\int_{2}^{N} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} = \int_{\ln 2}^{\ln N} \frac{dx}{x^{3/2}} = \int_{\ln 2}^{\ln N} x^{-3/2}\,dx = \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_{\ln 2}^{\ln N} = \left[-2x^{-1/2}\right]_{\ln 2}^{\ln N}$$

Cela donne :

$$\int_{2}^{N} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}} = -2(\ln N)^{-1/2} + 2(\ln 2)^{-1/2}.$$

Si N tend vers $+\infty$, alors $\displaystyle\int_{2}^{N} \frac{dt}{t(\ln t)^{3/2}}$ tend vers $2(\ln 2)^{-1/2}$.

Ainsi la somme $S_N = \displaystyle\sum_{k=3}^{N} u_k$ est majorée et comme les termes (u_k) sont positifs, la somme $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} u_k$ existe et la série converge.

Exercice 02

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrons que le polynôme caractéristique de A_α est scindé sur $\mathbf{R}$.

Partons de :

$$\chi_{A\alpha}(t) = \begin{vmatrix} t+2 & -2 & -2 \\ 0 & t-\alpha & 0 \\ 6 & -3 & t-5 \end{vmatrix}.$$

On commence par développer selon la deuxième ligne :

$$\chi_{A\alpha}(t) = (t-\alpha) \begin{vmatrix} t+2 & -2 \\ 6 & t-5 \end{vmatrix}.$$

Et donc :

$$\chi_{A\alpha}(t) = (t-\alpha)((t+2)(t-5)+12) = (t-\alpha)(t^2-3t+2).$$

On voit rapidement que les racines de t^2-3t+2 sont $t=1$ et $t=2$. Il reste :

$$\chi_{A\alpha}(t) = (t-\alpha)(t-1)(t-2).$$

En remarque, on peut vérifier que la trace est bien la somme des trois valeurs propres trouvées. En effet $Tr\, A_\alpha = \alpha + 3 = \alpha + 1 + 2$.

2. Montrons que A_α est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 1$.

• Si $\alpha \notin \{1, 2\}$, les trois valeurs propres sont distinctes et donc A_α est diagonalisable.

• Si $\alpha = 1$, on a deux sous-espaces propres. Le premier est $E_1(A_1)$ associè à 1. On le trouve en résolvant le système :

$$A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On trouve $E_1(A_1) = \text{Vect}\,((1, 0, \frac{3}{2})$ et donc $\mathsf{dim}\, E_1(A_1) = 1 \neq 2$. Ainsi 1 est double et pourtant l'espace propre associè est de dimension 1. Donc A_1 n'est pas diagonalisable.

On peut aussi trouver $E_2(A_1)$, espace propre associé à 2 et on trouve : $E_2(A_1) = \text{Vect}\,((1, 0, 2)$.

• Si $\alpha = 2$, alors c'est 2 qui est une valeur propre double et déterminons la dimension de l'espace propre associé $E_2(A_2)$.

On le trouve en résolvant le système :

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On trouve $E_2(A_2) = \text{Vect}\,((0, -1, 1), (1, 2, 0)$ et donc $\mathsf{dim}\, E_2(A_2) = 2$. Comme $\mathsf{dim}\, E_1(A_2) = 1$ car 1 est une valeur propre simple de A_2, on peut conclure que A_2 est diagonalisable.

3. En Supplément : à faire que s'il reste du temps. On note $B = A_1$. Montrons : $\exists\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que B soit semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

En déduire la valeur de c.

On sait que A_1 n'est pas diagonalisable pourtant A_1 est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé. Comme les deux premières colonnes de T sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, On prend pour les deux premiers vecteurs de la nouvelle base d'abord un vecteur propre associé à 2, par exemple $\vec{u}(1, 0, 2)$ et puis ensuite un vecteur propre associé à 1, par exemple $\vec{v}(2, 0, 3)$. On complète avec $\vec{j}(0, 1, 0)$ pour avoir une base de $\mathbf{R}^3$. Si ϕ est l'endomorphisme canoniquement associé à A_1 alors dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{j})$, ϕ est représenté par une matrice du type de T. Comme de plus la trace de T doit être égale à celle de A_1, $c = 1$.

On peut trouver a et b en utilisant P la matrice de passage de la base canonique à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{j})$, et alors :

$$T = P^{-1} A_1 P \Leftrightarrow PT = A_1 P.$$

En identifiant, on a a et b. Mais ce n'est pas demandé.