TELECOLLE BLAKU
Enoncé

Exercice 01

Soit la fonction $f(t) = |\cos t|$.

1. Montrer que f est paire et π-périodique. Tracer là sur $[-\pi, \pi]$.
2. Donner la série de Fourier de f.
3. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$.

Indications : 2. On pourra intégrer sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
On utilise : $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.
3. On pensera à Dirichlet avec les bonnes valeurs de t.

Exercice 02

Dans l'espace rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation : $x^2+y^2+2z^2 = 1$ et soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 \\ y & = & 3z-3 \end{array} \right. .$$

Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ et orthogonaux à la droite $\mathcal{D}$.

Indications : On rappelle que si une surface $\mathcal{S}$ a pour équation $f(x,y,z) = 0$, alors le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à cette surface est :

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

Et donc le vecteur gradient $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal à ce plan et doit être colinéaire à $\mathcal{D}$.

Correction

Exercice 01

Soit la fonction $f(t) = |\cos t|$.

1. Montrons que f est paire et π-périodique.

Il suffit d'écrire pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(-t) = |\cos(-t)| = |\cos t| = f(t) \text{ et } f(t+\pi) = |\cos(t+\pi)| = |-\cos t| = |\cos t| = f(t).$$

Pour le tracé, on vous fait confiance. Il suffit de tracer sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction cos puis de faire la symétrie orthogonale par rapport à Oy puis on translate.

2. Pour déterminer la série de Fourier de f, il faut trouver les coefficients de Fourier. Comme f est paire, $b_n = 0$ pour tout entier n. • Calcul de a_0.

On va intégrer sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ici $T = \pi$ et :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt.$$

On a rapidement :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

• Calcul de a_n pour n non nul.

On va encore intégrer sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ici $T = \pi$, $\omega = 2$ et :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\cos(2nt)\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos(2nt)\,dt.$$

On utilise : $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ et donc :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos((2n+1)t) + \cos((2n-1)t)\,dt.$$

Cela donne :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)} + \frac{\sin((2n-1)t)}{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Ce qui donne :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)} + \frac{\sin((2n-1)\frac{\pi}{2})}{2n-1}\right).$$

Puis : $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.

De même, $\sin((2n-1)\frac{\pi}{2}) = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(n\pi) = -(-1)^n$.

Alors :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)} - \frac{(-1)^n}{2n-1}\right) = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.$$

On a alors pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$S_f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos(2nt).$$

3. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos(2nt).$$

Si l'on applique avec $t = \pi/2$, on a : $\cos(2nt) = (-1)^n$ et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{-1}{2}.$$

Si l'on applique avec $t = 0$, on a : $\cos(2nt) = 1$ et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 02

Dans l'espace rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation : $x^2+y^2+2z^2 = 1$ et soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 3z-3 \end{array} \right. .$$

Déterminons les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ et orthogonaux à la droite $\mathcal{D}$.

On rappelle que si une surface $\mathcal{S}$ a pour équation $f(x,y,z) = 0$, alors le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à cette surface est :

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

Ici $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-1$. Donc un plan tangent en $M_0(x_0,y_0,z_0)$ à cette surface est :

$$(x-x_0)2x_0 + (y-y_0)2y_0 + (z-z_0)4z_0 = 0$$

car $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = 2x_0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = 2y_0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 4z_0$.

La droite $\mathcal{D}$ passe par $(2,0,1)$ et a pour vecteur directeur $(0,3,1)$.

Les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ et orthogonaux à la droite $\mathcal{D}$ sont ceux tels que le vecteur gradient $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ (qui est orthogonal à ces plans tangents) soit colinéaire à $\mathcal{D}$, donc colinéaire à $(0,3,1)$. On a :

$$\exists \in \mathbf{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} 2x_0 & = & \alpha \times 0 \\ 2y_0 & = & \alpha \times 3 \\ 4z_0 & = & \alpha \times 1 \end{array} \right. .$$

Cela donne : $x_0 = 0$ et $y_0 = 6z_0$.

Comme $M_0 \in \mathcal{S}$, $x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1 \Rightarrow z_0^2 = \dfrac{1}{38}$. On a donc deux plans tangents qui vérifient la condition,

$$\text{celui pour } M_0\left(0, \frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}\right) \text{ et celui pour } M_0\left(0, -\frac{6}{\sqrt{38}}, -\frac{1}{\sqrt{38}}\right);$$