TELECOLLE FAURE
Enoncé

Exercice 01

1. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on donne $P(X=i, Y=j) = a\,\dfrac{ij}{n^2(n+1)^2}$.
   Déterminer la valeur de a et trouver les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Indications : 1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(X=i,\, Y=j) = 1$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Par ailleurs, par exemple, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(X=i,\, Y=j)$.

2. On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 02

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

1. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}^\star$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et donner sa dérivée ainsi que sa monotonie.
3. En encadrant e^t entre $[x, 2x]$ ou sur $[2x, x]$, déterminer les limites de F aux bornes de son domaine et construire son tableau de variations.

Indications : 1. On sait qu'une fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.
2. Si l'on suppose par exemple $x > 0$, on a :
$\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt = \int_1^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt + \int_x^{1} \frac{e^t}{t}\,dt.$
De plus si ϕ est dérivable, $\left(\displaystyle\int_a^{\phi(x)} f(t)\,dt\right)' = \phi'(x) f(\phi(x))$.
3. On sépare le cas $x > 0$ et le cas $x < 0$ puis on crée une double inégalité qui encadre $F(x)$ par deux quantités qui tendent vers la même limite quand x tend vers 0.

Correction

Exercice 01

1. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on donne $P(X=i, Y=j) = a\,\dfrac{ij}{n^2(n+1)^2}$.

• Déterminons la valeur de a.

On doit avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(X=i,\, Y=j) = 1$.

Cela donne :

$$a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{ij}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

C'est-à-dire :

$$a\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n^2(n+1)^2} = \frac{a}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j = 1.$$

On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

Alors :

$$\frac{a}{n^2(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{n^2(n+1)^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} = 1.$$

Alors : $\dfrac{an^2(n+1)^2}{4n^2(n+1)^2} = 1 \Rightarrow a = 4$.

• Trouvons la loi marginale de X.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(X=i,\, Y=j)$. Donc :

$$P(X=i) = \sum_{j=1}^{n} 4\,\frac{ij}{n^2(n+1)^2} = \frac{4i}{n^2(n+1)^2}\sum_{j=1}^{n} j.$$

Alors :

$$P(X=i) = \frac{4i}{n^2(n+1)^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2i}{n(n+1)}.$$

Donc : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i) = \dfrac{2i}{n(n+1)}$.

• Trouvons la loi marginale de Y.

De même, on trouve :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P(Y=j) = \frac{2j}{n(n+1)}.$$

2. • Calcul de $E(X)$.

On a :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} i\,P(X=i) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Donc :

$$E(X) = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

• Calcul de $E(Y)$.

De même, $E(Y) = \dfrac{2n+1}{3}$.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

A t-on $P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$ pour tout couple (i, j) ?

On écrit :

$$P(X = i, Y = j) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2} = \frac{2i}{n(n+1)} \times \frac{2j}{n(n+1)} = P(X = i)P(Y = j).$$

Donc X et Y sont bien indépendantes.

Exercice 02

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt$.

1. Justifions que F est définie sur $\mathbb{R}^\star$.

On sait qu'une fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$. Ici, $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbf{R}^\star$ et donc sur $[x, 2x] \subset \mathbf{R}^\star$, que $x > 0$ ou que $x < 0$. Donc g est intégrable sur $[x, 2x]$ et donc $F(x)$ existe pour tout $x \neq 0$.

2. Montrons que F est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et donnons sa dérivée ainsi que sa monotonie.

Le calcul de F' prouvera son existence.

Si l'on suppose par exemple $x > 0$, on a :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt = \int_1^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt + \int_x^1 \frac{e^t}{t}\, dt.$$

De plus si ϕ est dérivable, $\left(\displaystyle\int_a^{\phi(x)} f(t)\, dt\right)' = \phi'(x)f(\phi(x))$. Donc, ici :

$$F'(x) = \left(\int_1^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt\right)' - \left(\int_1^{x} \frac{e^t}{t}\, dt\right)'.$$

Ce qui donne :

$$F'(x) = \frac{2e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^{2x} - e^x}{x}.$$

Cela s'écrit aussi : $\forall x > 0,\ F'(x) = \dfrac{e^x\,(e^x - 1)}{x}$.

Pour $x > 0$, on remplace 1 par -1 et on a le même raisonnement. Finalement :

$$\forall x \neq 0,\ F'(x) = \frac{e^x\,(e^x - 1)}{x}.$$

Etudions le signe de $F'(x)$.

Si $x > 0$, $F'(x) > 0$ si et seulement si $\dfrac{e^x\,(e^x - 1)}{x} > 0$ donc si et seulement si $e^x - 1 > 0$ donc si et seulement si $x > 0$.

Si $x < 0$, $F'(x) > 0$ si et seulement si $\dfrac{e^x\,(e^x - 1)}{x} > 0$ donc si et seulement si $e^x - 1 < 0$ donc si et seulement si $x < 0$.

Bilan : F est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$.

3. En encadrant e^t entre $[x, 2x]$ ou sur $[2x, x]$, déterminons les limites de F aux bornes de son domaine et construisons son tableau de variations.

On sépare le cas $x > 0$ et le cas $x < 0$ pour commencer.

Supposons $x > 0$.

On a :

$$e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} < F(x) < e^{2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t}.$$

Ce qui s'écrit :

$$e^x \ln 2 < F(x) < e^{2x} \ln 2.$$

Il reste à faire tendre x vers 0^+ : $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \ln 2$.

Supposons $x < 0$.
On a :

$$e^{2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t} < F(x) < e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t}.$$

Ce qui s'écrit :

$$e^{2x} \ln 2 < F(x) < e^x \ln 2.$$

Il reste à faire tendre x vers 0^- : $\lim_{x \to 0^-} F(x) = \ln 2$.