

TELECOLLE HASHIM

Enoncé

Exercice 01

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire et $\wedge$ le produit vectoriel. Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 1 et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left(\vec{x} + \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{x} \right).$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Justifier que l'on peut compléter $\vec{u}$ en $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
3. Préciser la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et reconnaître f .
4. On suppose que $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Préciser la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Indications : 1. Il suffit de vérifier la linéarité de f , c'est-à-dire :

Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $f(\vec{x} + a\vec{y}) = f(\vec{x}) + af(\vec{y})$.

2. Citer un résultat du cours.

3. On doit écrire $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ et $f(\vec{w})$ sous forme de combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Puis on a alors les colonnes de la matrice cherchée. On rappelle au passage que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.

4. On pose $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ puis on calcule les coordonnées de $f(\vec{x})$. On en déduit alors la matrice cherchée. Attention, utiliser la matrice de **3.** et donc introduire une matrice de passage P serait maladroit car il faudrait trouver $\vec{v}$ et $\vec{w}$ puis inverser P . Trop long.

Exercice 02

Déterminer la nature de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

Montrer ensuite que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$. Conclure.

Indications : Pour la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$, on pourra utiliser $|\sin u| \leq 1$.

Puis, on part de $\int_u^v \frac{\sin t}{t} dt$ et on fait une intégration par parties en prenant $t \mapsto 1 - \cos t$ pour primitive de $t \mapsto \sin t$. On fera ensuite tendre u vers 0 et v vers $+\infty$.

Correction

Exercice 01

Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 1 et f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left(\vec{x} + \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{x} \right).$$

1. Vérifions que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Comme il est clair que l'on reste dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de vérifier la linéarité de f , c'est-à-dire : Pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $f(\vec{x} + a\vec{y}) = f(\vec{x}) + af(\vec{y})$.

Alors :

$$f(\vec{x} + a\vec{y}) = \frac{1}{2} \left((\vec{x} + a\vec{y}) + \langle \vec{x} + a\vec{y}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge (\vec{x} + a\vec{y}) \right).$$

Or :

$$\langle \vec{x} + a\vec{y}, \vec{u} \rangle \vec{u} = \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u} + a \langle \vec{y}, \vec{u} \rangle \vec{u}.$$

Et :

$$\sqrt{3} \vec{u} \wedge (\vec{x} + a\vec{y}) = \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{x} + a \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{y}.$$

Alors, en développant $f(\vec{x} + a\vec{y})$, on tombe bien sur $f(\vec{x}) + af(\vec{y})$.

2. Justifions que l'on peut compléter $\vec{u}$ en $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ en base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Il suffit de remarquer que l'une au moins des familles $(\vec{u}, \vec{j}, \vec{k})$, $(\vec{u}, \vec{i}, \vec{j})$, $(\vec{u}, \vec{i}, \vec{k})$ est libre. On applique Gram-Schmidt à cette famille libre choisie, on a donc l'existence de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ qui forment avec $\vec{u}$ une base orthonormée. On peut la choisir directe (quitte à prendre $-\vec{w}$) et donc $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.

3. Précisons la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

On doit écrire $f(\vec{u})$, $f(\vec{v})$ et $f(\vec{w})$ sous forme de combinaisons linéaires de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

On a :

$$f(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left(\vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{u} \right).$$

Comme $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 1$ et $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, il reste :

$$f(\vec{u}) = \vec{u}.$$

Puis :

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{2} \left(\vec{v} + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{v} \right).$$

Comme $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, il reste :

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{v} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{w}.$$

Puis :

$$f(\vec{w}) = \frac{1}{2} \left(\vec{w} + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{w} \right).$$

Comme $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle = 0$ et $\vec{u} \wedge \vec{w} = -\vec{v}$, il reste :

$$f(\vec{w}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{w}.$$

Puis on a alors les colonnes de la matrice cherchée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On reconnaît la matrice de la rotation vectorielle d'axe porté et dirigé par $\vec{u}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

4. On suppose ici que $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Précisons la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ puis on calcule les coordonnées de $f(\vec{x})$.

Alors :

$$\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)(1, 1, 1).$$

Puis :

$$\sqrt{3}\vec{u} \wedge \vec{x} = (1, 1, 1) \wedge (x_1, x_2, x_3) = (x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1).$$

Alors $f(\vec{x})$ vaut :

$$\frac{1}{2} \left((x_1, x_2, x_3) + \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)(1, 1, 1) + (x_3 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_1) \right).$$

On trouve :

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{3}(2x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 + 2x_3).$$

La matrice cherchée est donc :

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 02

- Déterminons la nature de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

On commence par dire que $g : t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_a^b \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ pour tout $0 < a < b$.

Au voisinage de 0,

$$g(t) \sim 1.$$

Donc g a un prolongement par continuité en 0 et l'intégrale $\int_0^b \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ existe.

Puis, pour tout $u \in \mathbf{R}$, $|\sin u| \leq 1$. Donc,

$$\forall x \geq b, g(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Comme $\int_b^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ existe car c'est une intégrale de Riemann convergente, il en est de même de $\int_b^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

En conclusion, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ existe.

Montrons que : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

Partons de $\int_u^v \frac{\sin t}{t} dt$, où $0 < u < v$ et on va faire une intégration par parties en prenant $t \mapsto 1 - \cos t$ pour primitive de $t \mapsto \sin t$. On a alors :

$$(1) \quad \int_u^v \frac{\sin t}{t} dt = - \int_u^v \frac{1 - \cos t}{-t^2} dt + \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_u^v.$$

Alors :

$$\left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_u^v = \frac{1 - \cos v}{v} - \frac{1 - \cos u}{u}.$$

Comme $\left| \frac{1 - \cos v}{v} \right| \leq \frac{2}{v}$, si v tend vers $+\infty$, alors $\frac{1 - \cos v}{v}$ tend vers 0.

Puis, $\frac{1 - \cos u}{u} \sim \frac{u^2/2}{u}$ au voisinage de 0 et tend donc vers 0 quand u tend vers 0. Il reste à faire tendre u vers 0 et v vers $+\infty$ dans (1). Cela donne :

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

Il reste à remarquer que $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$. Alors :

$$\int_{+\infty}^0 \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} dt.$$

On pose $x = \frac{t}{2}$ et alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin^2 x}{4x^2} 2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

q.e.d

On peut conclure que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est une intégrale convergente.