Corrigé Maths TSI CCP 2017

Problème 1 : Étude d'une courbe

Partie I - Deux fonctions

Q1. $1-t^2=(1+t)(1-t)$ ainsi $1-t^2=0 \Leftrightarrow t\in\{-1;1\}$ donc f et g sont définies sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;\infty[$.

Q2. $$f(\sqrt{3})=\frac{(\sqrt{3})^2}{1-(\sqrt{3})^2}=\frac{3}{1-3}=-\frac{3}{2}$$

$$g(\sqrt{3})=\frac{(\sqrt{3})^3}{1-(\sqrt{3})^2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Q3. Le domaine de définition de f *et* de g est centré par rapport à 0.

$\forall t\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;\infty[$, $-t\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;\infty[$ et

$$f(-t)=\frac{(-t)^2}{1-(-t)^2}=\frac{t^2}{1-t^2}=f(t)$$

$$g(-t)=\frac{(-t)^3}{1-(-t)^2}=-\frac{t^3}{1-t^2}=-g(t)$$

Ainsi f est une fonction paire et g une fonction impaire.

$M(-t)$ a pour coordonnées $(f(t);-g(t))$ donc $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Q4. $f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{t^2}{-t^2}=-1$ donc $\lim_{t\to+\infty} f(t)=-1$

et $g(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{t^3}{-t^2}=-t$ donc $\lim_{t\to+\infty} g(t)=-\infty$

Q5. La fonction carrée est continue en 1 ainsi, $\lim_{t\to 1^-} t^2=\lim_{t\to 1^+} t^2=1$

$1-t^2<0 \quad\Leftrightarrow\quad t\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ainsi $\lim_{t\to 1^-} =1-t^2=0^+$ donc $\lim_{t\to 1^-} f(t)=+\infty$

$\lim_{t\to 1^+} =1-t^2=0^-$ donc $\lim_{t\to 1^+} f(t)=-\infty$

De même $\lim_{t\to 1^-} t^3=\lim_{t\to 1^+} t^3=1$ donc $\lim_{t\to 1^-} g(t)=+\infty$ et $\lim_{t\to 1^+} g(t)=-\infty$

Q6. Les fonctions f et g sont des fractions rationnelles, elles sont donc dérivables sur leur ensemble de définition contenant $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

$$\forall t\in[0;1[\cup]1;+\infty[,\ f'(t)=\frac{2t(1-t^2)-t^2\times(-2t)}{(1-t^2)^2}=\frac{2t-2t^3+2t^3}{(1-t^2)^2}=\frac{2t}{(1-t^2)^2}$$

$$g'(t)=\frac{3t^2(1-t^2)-t^3\times(-2t)}{(1-t^2)^2}=\frac{3t^2-3t^4+2t^4}{(1-t^2)^2}=\frac{3t^2-t^4}{(1-t^2)^2}=\frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$$

Q7. $\forall t\in]0;1[\cup]1;+\infty[$, $\left.\begin{matrix}2t>0\\(1-t^2)^2>0\end{matrix}\right\}$ donc $f'(t)>0$

$\left.\begin{matrix}t^2>0\\(1-t^2)^2>0\end{matrix}\right\}$ donc $g'(t)$ est du signe de $(3-t^2)$ (négatif à l'extérieur des racines)

t	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
signe de f'	0	$+$	‖	$+$		$+$	
f	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{3}{2}$	↗	-1
g	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$
signe de $g'(t)$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$(3-t^2)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	

Partie II - Tangente à l'origine et au point $M(\sqrt{3})$.

Q8. $\frac{1}{1-u}\underset{u\to 0}{=}1+u+o(u)$

Q9. $f(t)=t^2\frac{1}{1-t^2}\underset{t\to 0}{=}t^2(1+t^2+o(t^2))\underset{t\to 0}{=}t^2+t^4+o(t^4)\underset{t\to 0}{=}t^2+o(t^3)$

$g(t)=t^3\frac{1}{1-t^2}\underset{t\to 0}{=}t^3(1+t^2+o(t^2))\underset{t\to 0}{=}t^3+t^5+o(t^5)\underset{t\to 0}{=}t^3+o(t^3)$

Q10. La fonction f étant une fraction rationnelle définie sur $]-1;1[$, f est de classe C^2 sur $]-1;1[$, ainsi la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 0 donne :

$$f(t)\underset{t\to 0}{=}f(0)+f'(0)t+\frac{f''(0)}{2}t^2+o(t^2)$$

Par unicité du développement limité en 0 on a : $\frac{f''(0)}{2}=1$ donc $f''(0)=2$

Le même raisonnement appliqué à g donne $\frac{g''(0)}{2}=0$ donc $g''(0)=0$

Q11. $\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}t^2=0\\t^3=0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad t=0$

La courbe C passe par l'origine du repère uniquement pour $t=0$.

Or $\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\end{pmatrix}\underset{t\to 0}{=}t^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+o(t^2)$ donc la courbe C admet à l'origine du repère une demi-tangente dirigée par le vecteur $\vec{i}$.

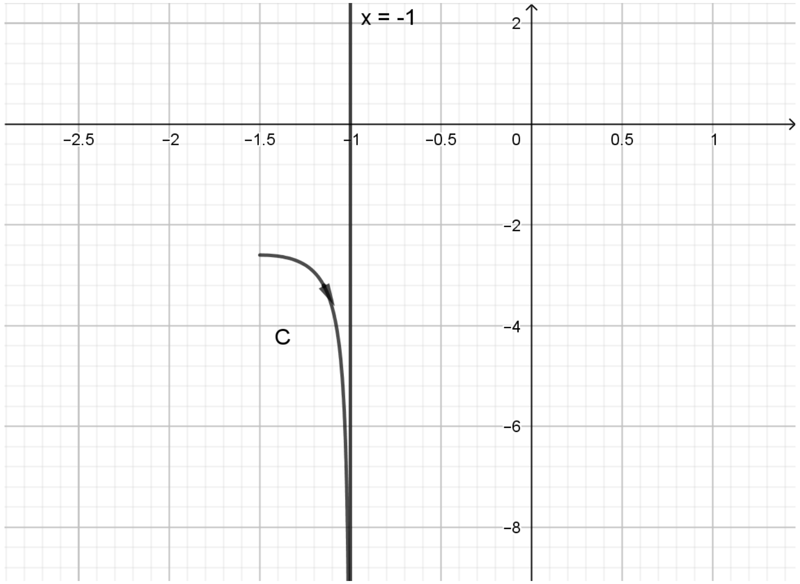
Q.12 Le point $M(\sqrt{3})$ est un point régulier de C ainsi le vecteur de coordonnées $(f'(\sqrt{3});g'(\sqrt{3}))$ est tangent à C au point $M(\sqrt{3})$. D'après les tableaux de signes des dérivées précédents, $f'(\sqrt{3})>0$ et $g'(\sqrt{3})=0$ ainsi le vecteur $\vec{i}$ est tangent à C au point $M(\sqrt{3})$.

Partie III - Asymptotes

Q13. La droite d'équation $x=-1$ est asymptote à C au voisinage de $t=+\infty$.

D'après le tableau de variations de f , $f(t)$ tend vers -1 par valeurs inférieures à -1 lorsque t tend vers $+\infty$, ainsi C est située à gauche de la droite d'équation $x=-1$ pour t au voisinage de $+\infty$.

De plus, le tableau de variations de g , indique que la courbe C se dirige vers le bas lorsque t tend vers $+\infty$.



Q14. $N(t)$ étant le point de D d'abscisse $f(t)$ on a : $y_{N(t)}=f(t)-\frac{1}{2}$

Q15. Soit $\Delta=1^2-4(-2)1=9$,

les racines de P sont $t_1=\frac{-1+3}{-4}=-\frac{1}{2}$ et $T_2=\frac{-1-3}{-4}=1$

Ainsi, $P(t)=-2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-1)$

Q16. $\forall t\in[0;1[\cup]1;+\infty[$, $\delta(t)=\frac{2t^3}{2(1-t^2)}-\frac{2t^2}{2(1-t^2)}+\frac{1-t^2}{2(1-t^2)}=\frac{2t^3-3t^2+1}{2(1-t^2)}$

$\delta(t)=\frac{(t-1)(2t^2-t-1)}{2(1-t)(1+t)}=-\frac{2t^2-t-1}{2(1+t)}=\frac{P(t)}{2(t+1)}$

Q17. Au voisinage de 1, $t+1>0$ donc $\delta(t)$ est du signe de $P(t)$. Or au voisinage de 1, $t+\frac{1}{2}>0$ ainsi $P(t)$ est du signe de $-2(t-1)$: $\delta(t)>0$ à gauche de 1 et $\delta<0$ à droite de 1.

Q18. $\forall t\in[0;1[\cup]1;+\infty[$, $g(t)-y_{N(t)}=g(t)-\left(f(t)-\frac{1}{2}\right)=\delta(t)=\frac{P(t)}{2(t+1)}$

Ainsi, par continuité de P en 1, $\lim\limits_{t\to 1} g(t)-y_{N(t)}=0$ donc la droite D est asymptote à la courbe C au voisinage de 1.

Plus précisément, pour t tendant vers 1 par valeurs inférieures à 1 :

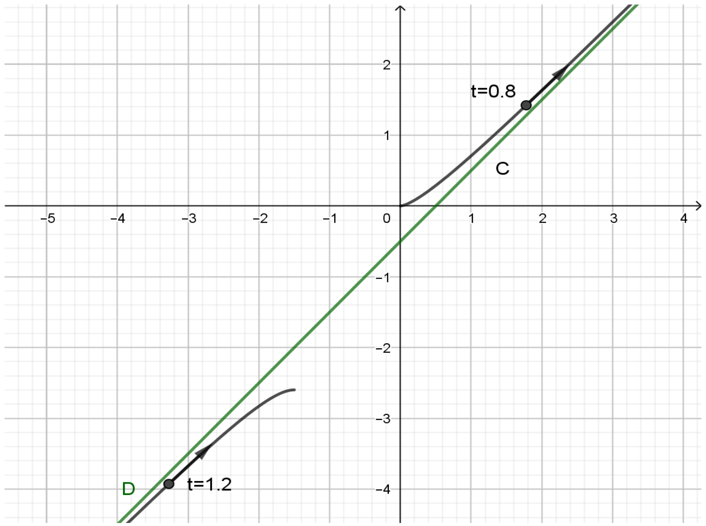
► f est croissante sur $[0;\sqrt{3}]$ donc la courbe C est dirigée vers la droite et $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} f(t)=+\infty$ donc la courbe C admet des abscisses arbitrairement grandes c'est-à-dire « infiniment à droite »

► $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} g(t)-y_{N(t)}=0^+$ donc la courbe C est au-dessus la droite D

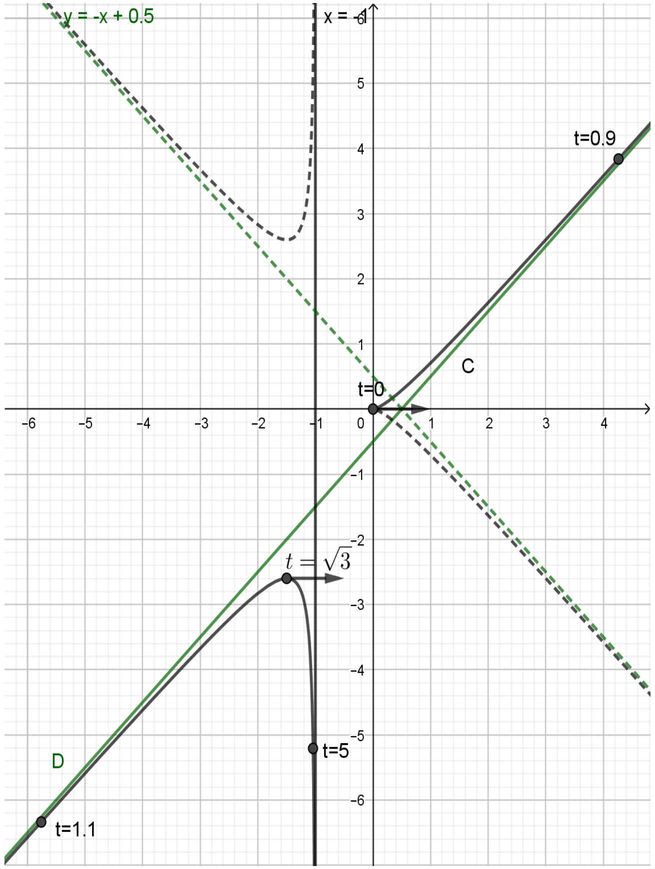
Par ailleurs, pour t tendant vers 1 par valeurs supérieures à 1 :

► f est croissante sur $]1;\sqrt{3}]$ donc la courbe C est dirigée vers la droite et $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} f(t)=-\infty$ donc la courbe C admet des abscisses arbitrairement grandes négativement c'est-à-dire « infiniment à gauche »

► $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t>1}} g(t)-y_{N(t)}=0^-$ donc la courbe C est en-dessous de la droite D



Q19. et Q20.



Problème 2 - Marche aléatoire sur le net

Partie I - Un premier exemple

Q.21. Les coefficients de la matrice de transition sont définis par :

$$\begin{array}{c} \text{Probabilité d'être sur la page } i \text{ à l'instant } n+1 \text{ sachant ... qu'on était sur la page } j \text{ à l'instant } n \end{array} \quad \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & t_{i,j} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Ainsi, $T_4=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Q.22. $t_{i,j}=P_{A_n(j)}(A_{n+1}(i))$

Or $(A_{n+1}(i))_{i\in\{1,2,3,4\}}$ est un système complet d'événements, car à l'instant $\tau=n+1$, l'internaute est sur la page 1 ou 2 ou 3 ou 4 et sur une seule d'entre elles. ainsi la formule des probabilités totales donne : $\forall B\in\Omega$, $P(B)=\sum_{i=1}^{4} P(B\cap A_{n+1}(i))$

Ainsi en particulier $\forall j\in\{1,2,3,4\}$, $P(A_n(j))=\sum_{i=1}^{4} P(A_n(j)\cap A_{n+1}(i))$

$P(A_n(j))=\sum_{i=1}^{4} P(A_n(j))\times P_{A_n(j)}(A_{n+1}(i))$ d'après la formule des probabilités composées

$P(A_n(j))=P(A_n(j))\sum_{i=1}^{4} t_{i,j}$

Or, par hypothèse, $P(A_n(j))\neq 0$ donc $1=\sum_{i=1}^{4} t_{i,j}$

Q23. $(A_n(j))_{j\in\{1,2,3,4\}}$ est un système complet d'événements, car à l'instant $\tau=n$, l'internaute est sur la page 1 ou 2 ou 3 ou 4 et sur une seule d'entre elles.ainsi la formule des probabilités totales donne : $p_{n+1}(1)=P(A_{n+1}(1))=\sum_{j=1}^{4} P(A_n(j)\cap A_{n+1}(1))$

$p_{n+1}(1)=\sum_{j=1}^{4} P(A_n(j))\times P_{A_n(j)}(A_{n+1}(1))$ d'après la formule des probabilités composées

$p_{n+1}(1)=\sum_{j=1}^{4} p_n(j)t_{1,j}$

Q24 De même : $p_{n+1}(2)=\sum_{j=1}^{4} p_n(j)t_{2,j}$, $p_{n+1}(3)=\sum_{j=1}^{4} p_n(j)t_{3,j}$, $p_{n+1}(4)=\sum_{j=1}^{4} p_n(j)t_{4,j}$

Q25. $$T_4U_n=\begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & t_{1,3} & t_{1,4} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} & t_{2,4} \\ t_{3,1} & t_{3,2} & t_{3,3} & t_{3,4} \\ t_{4,1} & t_{4,2} & t_{4,3} & t_{4,4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n(1) \\ p_n(2) \\ p_n(3) \\ p_n(4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{4} p_n(j)(1,j) \\ \sum_{j=1}^{4} p_n(j)(2,j) \\ \sum_{j=1}^{4} p_n(j)(3,j) \\ \sum_{j=1}^{4} p_n(j)(4,j) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{n+1}(1) \\ p_{n+1}(2) \\ p_{n+1}(3) \\ p_{n+1}(4) \end{pmatrix}=T_{n+1}$$

Q26. Soit HR(n) :« $U_n=(T_4)^n U_0$ »

Initialisation : $(T_4)^0=I_4$ donc HR(0) est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{HR}(n)$ soit vraie

$U_{n+1}=T_4 U_n=T_4(T_4)^n U_0$ d'après $\mathrm{HR}(n)$

Ainsi $U_{n+1}=(T_4)^{n+1} U_0$ donc $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie.

Partie II - Étude d'un polynôme et de trois suites

Q27. $S(1)=4\times 1^3-3\times 1-1=4-3-1=0$

$S'(X)=12X^2-3$ donc $S'(1)=12\times 1^2-3=9\neq 0$ donc 1 est racine simple de S

$$S\left(-\frac{1}{2}\right)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{4}{8}+\frac{3}{2}-1=\frac{-1+3-2}{2}=0$$

$S'\left(-\frac{1}{2}\right)=12\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3=\frac{12}{4}-\frac{12}{4}=0$ donc $-\frac{1}{2}$ est racine de S d'ordre au moins 2

La somme des ordres de multiplicités des racines de S devant être inférieure ou égale à son degré : $-\frac{1}{2}$ est racine double de S.

Q28. La division euclidienne de X^n par $S(X)$ assure l'existence et l'unicité d'un couple de polynômes $(Q(X);R(X))$ tels que : $\begin{cases} X^n=S(X)Q(X)+R(X) \\ deg(R(X))<deg(S(X))=3\end{cases}$

Ainsi en posant $R(X)=\alpha_n X^2+\beta_n X+\gamma_n$ on obtient l'existence de $(\alpha_n;\beta_n;\gamma)\in\mathbb{R}^3$ et $Q\in\mathbb{R}(X)$ demandés.

Q29. $1^n=S(1)Q(1)+\alpha_n+\beta_n+\gamma_n$ or $S(1)=0$ donc $1=\alpha_n+\beta_n+\gamma_n$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n=S\left(-\frac{1}{2}\right)Q\left(-\frac{1}{2}\right)+\alpha_n\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\beta_n\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\gamma_n \text{ or } S\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{4}\alpha_n-\frac{1}{2}\beta_n+\gamma_n$

Q30. $nX^{n-1}=S'(X)Q(X)+S(X)Q'(X)+2\alpha_n X+\beta_n$ or $S'\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ donc

$n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2\alpha_n\left(-\frac{1}{2}\right)+\beta_n$ i.e. $n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\alpha_n+\beta_n$

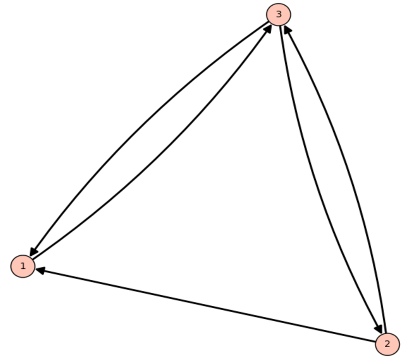
Q31. $\left|n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right|=\left|2(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|=4n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une exponentielle de base $\frac{1}{2}$, or les croissances comparées assurent que toute fonction exponentielle est prépondérante sur les fonctions polynomiales, ainsi comme $\frac{1}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$.

Les suites sont donc convergentes et $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\frac{4}{9} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=\frac{4}{9} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=\frac{1}{9}\end{cases}$

Partie III. Un deuxième exemple

Q32.



Q33. $$det(XI_3-T_3)=\begin{vmatrix} X & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & X & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} X-1 & X-1 & X-1 \\ 0 & X & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & X\end{vmatrix} \quad L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3$$

$$=(X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & X\end{vmatrix}=(X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & X & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & X+1\end{vmatrix} \quad L_3\leftarrow L_3+L_1$$

$$=(X-1)\begin{vmatrix} X & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & X+1\end{vmatrix} \text{ par développement suivant la première colonne}$$

$$=(X-1)\left(X(X+1)+\frac{1}{4}\right)=(X-1)\left(X^2+X+\frac{1}{4}\right)=(X-1)\left(X+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}S(X)$$

Q34. Les valeurs propres de T_3 sont les racines de son polynôme caractéristique donc les racines de S : 1 et $-\frac{1}{2}$.

Q35. 1 est valeur propre de T_3 d'ordre de multiplicité 1 donc : $dim(\mathrm{Ker}(I_3-T_3))=1$

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_3-\mathrm{T}_3)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1$$

$$=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_2$$

$$=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{4}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}_1\leftarrow \mathrm{L}_1+\frac{1}{2}\mathrm{L}_2$$

$$=\mathit{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right)$$

Vérification : $\mathrm{T}_3\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$

$-\frac{1}{2}$ est valeur propre de T_3 d'ordre de multiplicité 2 donc : $\mathit{dim}(\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_3-\mathrm{T}_3))\in\{1\,;2\}$

$$\mathrm{Ker}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{I}_3-\mathrm{T}_3\right)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad \begin{cases}\mathrm{L}_1\leftarrow -2\,\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_2\leftarrow -2\,\mathrm{L}_2\\ \mathrm{L}_3\leftarrow -2\,\mathrm{L}_3\end{cases}$$

$$=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3-2\,\mathrm{L}_1$$

$$=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}_3\leftarrow \mathrm{L}_3+\mathrm{L}_1$$

$$=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}_1\leftarrow \mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2$$

$$=\mathit{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\ \text{ donc }\ \mathit{dim}\left(\mathrm{Ker}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{I}_3-\mathrm{T}_4\right)\right)=1$$

Q36. La somme des dimensions des sous-espaces propres de T_3 est 2 mais sa taille est 3 donc, d'après le théorème de diagonalisation, T_3 n'est pas diagonalisable.

Q37. $(\mathrm{T}_3)^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$(\mathrm{T}_3)^3=\mathrm{T}_3(\mathrm{T}_3)^2=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix}$

$\mathrm{S}(\mathrm{T}_3)=4(\mathrm{T}_3)^3-3\,\mathrm{T}_3-\mathrm{I}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 6 & 3 & 2\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Q38. $a+b+c=p_0(1)+p_0(2)+p_0(3)=\mathrm{P}(\mathrm{A}_0(1))+\mathrm{P}(\mathrm{A}_0(2))+\mathrm{P}(\mathrm{A}_0(3))=1$ car $(\mathrm{A}_0(1)\,;\mathrm{A}_0(2)\,;\mathrm{A}_0(3))$ forme un système complet d'événements : à l'instant $\tau=0$, l'internaute est sur la page 1 ou 2 ou 3 et sur une seule d'entre elles.

Q39. $\mathrm{S}(\mathrm{T}_3)=0_3$ ainsi $\forall n\in\mathrm{N}$, $(\mathrm{T}_3)^n=\alpha_n(\mathrm{T}_3)^2+\beta_n\mathrm{T}_3+\gamma_n\mathrm{I}_3$

Q40. $\mathrm{U}_n=(\alpha_n(\mathrm{T}_3)^2+\beta_n\mathrm{T}_3+\gamma_n\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\alpha_n\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2a+b+c\\2a+b\\2b+3c\end{pmatrix}+\beta_n\frac{1}{2}\begin{pmatrix}b+c\\c\\2a+b\end{pmatrix}+\gamma_n\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Q41. $p_n(1)=\frac{\alpha_n}{4}(2a+b+c)+\frac{\beta_n}{2}(b+c)+\gamma_n a$ or, d'après Q31, les suites (α_n) ; (β_n) et (γ_n) sont convergentes, donc $(p_n(1))$ est convergente et :

$\lim\limits_{n\to+\infty}p_n(1)=\frac{1}{9}(2a+b+c)+\frac{2}{9}(b+c)+\frac{a}{9}=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c=\frac{1}{3}(a+b+c)=\frac{1}{3}$ cf Q38.

De même : $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n(2)=\frac{1}{9}(2a+b)+\frac{2}{9}c+\frac{1}{9}b=\frac{2}{9}(a+b+c)=\frac{2}{9}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}p_n(3)=\frac{1}{9}(2b+3c)+\frac{2}{9}(2a+b)+\frac{1}{9}c=\frac{4}{9}a+\frac{4}{9}b+\frac{4}{9}c=\frac{4}{9}(a+b+c)=\frac{4}{9}$

Les probabilités des événements $\mathrm{A}_n(1)$, $\mathrm{A}_n(2)$ et $\mathrm{A}_n(3)$ sont arbitrairement proches respectivement de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{4}{9}$ à partir d'un certain rang.

Plus concrètement mais moins rigoureusement, pour n « très grand » on peut considérer que l'internaute se trouve sur la page 1 avec une probabilité de $\frac{1}{3}$, sur la page 2 avec une probabilité de $\frac{2}{9}$, et sur la page 3 avec une probabilité de $\frac{4}{9}$.

Partie IV - Popularité d'une page

Q42. Les pages 2, 3 et 4 ont un lien vers la page 1 : la page 1 semble donc plus populaire que les autres. Cependant, la page 1 a des liens vers les pages 2,3 et 4 : la page 1 est donc moins populaire que les autres. Les quatre pages semblent avoir la même popularité (difficile d'établir une relation d'ordre total sur les sommets du graphes avec cette simple définition : des précisions à la fin du corrigé).

Q43. $R=T_3 R$ donc R est un vecteur propre de T_3 associé à la valeur propre 1.

Q44. D'après Q35, $R \in Vect\left(\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right)$ de plus $r(i)\in[0;1]$ et $r(1)>0$

On peut donc poser par exemple $R=\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ et dans ce cas $\|R\|_1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{9}{4}$

Q45. $R'=\frac{4}{9}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} \in Vect\left(\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\right)$ donc R' est aussi vecteur propre de T_3 associé à la valeur propre 1 donc solution du système (2).

Q46. D'après R', $r(3)>r(1)>r(2)$ donc la page 3 est plus populaire que la page 1 elle-même plus populaire que la page 2.

Bonus : Et pour le graphe de la partie I ?

$\mathrm{Ker}(I_4-T_4)=Vect\left(\begin{pmatrix}12\\6\\7\\4\end{pmatrix}\right)$ donc $R'=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}12\\6\\7\\4\end{pmatrix}$ ainsi $r(1)>r(3)>r(2)>r(4)$