TELECOLLE TORNERO Maxime

Enoncé

Exercice 01

1. Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \ln(1 - \ln x)$.
2. Donner les limites aux bornes et construire le tableau de variation.
   Montrer que f admet une fonction réciproque g sur un intervalle à préciser.
   Trouver l'expression de g.
3. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = \ln 2$. Trouver α.
4. Montrer que f'' s'annule une seule fois en β que l'on calculera.
5. Donner la tangente en β et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Indications : 1. $1 - \ln x > 0$ nécessairement.
2. Pour la fonction réciproque, on peut utiliser le théorème du cours (à bien écrire) pour montrer l'existence de cette réciproque mais on peut aussi directement poser $y = f(x)$ puis écrire x en fonction de y. Si c'est possible, on a prouvé qu'il y a une fonction réciproque et en plus, on a son expression.
3. Il est clair que $g(\ln 2) = \alpha$ et comme vous connaissait g, facile !
4. Kultur : On dit qu'en $x = \beta$, la courbe présente un point d'inflexion.
5. L'idée est de faire un DL en $x = \beta + h$ de $f(x)$ avec h tendant vers 0 à l'ordre 3.

Exercice 02

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Résoudre : $\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 4x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) & = & x(t) + 4y(t) + z(t) \\ z'(t) & = & x(t) + y(t) + 4z(t) \end{array} \right.$ avec $x(0) = y(0) = 2$, $z(0) = -1$.

Indications : 1. On calcule le polynôme caractéristique et on doit trouver une valeur propre double et une valeur propre simple. Un coup de pouce : 3 est la valeur propre double. Il faut déterminer P la matrice de passage car on en a besoin pour la suite. Et aussi nommer D la matrice diagonale semblable à A.
2. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et donc $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$. On remarque que $X'(t) = AX(t)$. Dans une base de vecteurs propres, $X(t)$ devient $Y(t)$ et on a : $X(t) = PY(t)$. On résout ensuite le système différentiel $Y'(t) = DY(t)$ (cela engendre trois constantes) puis on reprend $X(t)$ et on utilise la condition initiale qui donne les valeurs des constantes.

Correction

Exercice 01

1. On sait que la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ et donc $1-\ln x>0$ nécessairement. Or :

$$1-\ln x>0 \Leftrightarrow 1>\ln x \Leftrightarrow x<e.$$

Par ailleurs $\ln x$ existe que pour $x>0$ et donc :

$$\text{le domaine de définition de } f \text{ est }]0,e[.$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0,e[$ et si l'on pose $u(x)=1-\ln x$,

$$f'(x)=(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}=\frac{-1}{x(1-\ln x)}.$$

Comme $x(1-\ln x)>0$ sur $]0,e[$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]0,e[$.
Puis : $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=-\infty$.
Bilan : f est continue et strictement décroissante de $]0,e[$ dans $\mathbb{R}$ et possède donc une fonction réciproque g strictement décroissante de $\mathbb{R}$ vers $]0,e[$.
Puis :

$$y=\ln(1-\ln x)\Leftrightarrow e^y=1-\ln x\Leftrightarrow \ln x=1-e^y\Leftrightarrow x=\exp\left(1-e^y\right)=g(y).$$

3. Il est clair que $g(\ln 2)=\alpha$ car $f(\alpha)=\ln 2$. Donc l'existence (et l'unicité) de α est immédiate.
Puis,

$$\alpha=g(\ln 2)=\exp\left(1-e^{\ln 2}\right)=\exp\left(1-2\right)=\frac{1}{e}.$$

4. On a :

$$f''(x)=\left(\frac{-1}{x(1-\ln x)}\right)'=\frac{1-\ln x-1}{(x-x\ln x)^2}=\frac{-\ln x}{(x-x\ln x)^2}.$$

Donc $f''(x)$ ne s'annule que pour $\ln x=0$ donc $\beta=1$.
5. On a $f'(\beta)=-1$ et comme une équation de tangente est : $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ avec ici $x_0=1$, il reste :

$$y=-(x-1)=-x+1.$$

L'idée ensuite est de faire un DL en $x=1+h$ de $f(x)$ avec h tendant vers 0 à l'ordre 3. On a :

$$f(1+h)=\ln(1-\ln(1+h))=\ln\left(1-\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)\right)=\ln\left(1-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3)\right)$$

$$=-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}-\frac{1}{2}\left(-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\left(-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}\right)^3$$

$$=-h+\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{2}-\frac{h^3}{6}+o(h^3).$$

Cela donne : $f(1+h)=-h+\dfrac{h^3}{6}+o(h^3)$.
La courbe est au dessus de la tangente car $1/6>0$.

Exercice 02

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Alors : $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & -1 \\ -1 & t-4 & -1 \\ -1 & -1 & t-4 \end{vmatrix}$.
Si dans L_2, on enlève L_3 et dans L_1 on enlève aussi L_3,

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 0 & -t+3 \\ 0 & t-3 & -t+3 \\ -1 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = (t-3)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & t-4 \end{vmatrix}.$$

On trouve finalement : $\chi_A(t) = (t-3)^2(t-6)$.

Puis on cherche $E_3(A)$ l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 3X$, on trouve le plan $x + y = z = 0$.

Puis on cherche $E_6(A)$ l'ensemble des vecteurs colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 6X$, on trouve la droite $\mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right)$.
On peut remarquer au passage que A est symétrique réelle donc diagonalisable et que $E_3(A)$ et $E_6(A)$ sont supplémentaires orthogonaux .
On trouve enfin :

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit : $\begin{cases} x'(t) &= 4x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) &= x(t) + 4y(t) + z(t) \\ z'(t) &= x(t) + y(t) + 4z(t) \end{cases}$ avec $x(0) = y(0) = 2$, $z(0) = -1$.
On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et donc $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
On remarque que $X'(t) = AX(t)$.
Dans une base de vecteurs propres, $X(t)$ devient $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et,
comme $X(t) = PY(t)$ et $A = PDP^{-1}$,

$$X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow (PY(t))' = PDP^{-1}X(t) \Leftrightarrow PY'(t) = PDP^{-1}PY(t)$$

$$\Leftrightarrow PY'(t) = PDY(t) \Leftrightarrow Y'(t) = DY(t).$$

Le système $Y'(t) = DY(t)$ est :

$$\begin{cases} u'(t) &= 3u(t) \\ v'(t) &= 3v(t) \\ w'(t) &= 6w(t) \end{cases}.$$

Il existe $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que pour tout t,

$$u(t) = a\,e^{3t},\ v(t) = b\,e^{3t},\ w(t) = c\,e^{6t}.$$

Puis $X(t) = PY(t)$ donne $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en fonction de a, b et c. Il reste à user des conditions initiales et on trouve :

$$x(t) = e^{3t} + e^{6t},\ y(t) = e^{3t} + e^{6t},\ z(t) = -2\,e^{3t} + e^{6t}.$$