TELECOLLE SANVICENTE
Enoncé

Exercice 01

On suppose que lors d'un accouchement la probabilité d'avoir des jumeaux est $\frac{1}{50}$. On suppose aussi tous les accouchements indépendants les uns des autres.
On note X_n le nombre d'accouchements avec jumeaux sur n accouchements au total.

1. Justifier que X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ en fonction de n.
3. On suppose $n = 50$. Calculer la probabilité de ne pas avoir de jumeaux parmi les 50 accouchements et celle d'avoir 2 jumeaux parmi les 50 accouchements.
4. On fait une approximation de la loi de X_n par une loi de Poisson. On suppose toujours $n = 50$.
   (a) Quel est le paramètre de la loi de Poisson utilisée ici ?
   (b) Calculer de nouveau la probabilité de ne pas avoir de jumeaux parmi les 50 accouchements et celle d'avoir 2 jumeaux parmi les 50 accouchements. Comparer avec **3.**

Indications : On rappelle que si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$$

et que si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercice 02

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire :

$$\Psi(P,Q) = \langle P,Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1),$$

où P' (resp. P'') désigne le polynôme dérivé première (resp. seconde) de P.

1. Vérifier que $\langle\, ,\, \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Indications : 1. On doit montrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est symétrique, puis linéaire par rapport à sa première variable par exemple puis que cette forme est positive puis définie.
2. On appliquera le procédé de Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$ en déterminant une base orthogonale puis orthonormale.
Plus précisement, on cherche a, b et c tels que les polynômes (V_1, V_2, V_3) avec

$$\begin{cases} V_1 &= 1 \\ V_2 &= X + a.1 \\ V_3 &= X^2 + b.1 + c.X \end{cases}$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
Puis, on normalise en posant $W_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$, $W_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|}$ et $W_3 = \frac{V_3}{\|V_3\|}$.

Correction