TELECOLLE VERBAEYS
Enoncé

Exercice 01

Résoudre l'équation

$$(E) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.$$

Indications : on note $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u = ax + by,\ v = cx + dy)$ et g telle que : $g\,o\,h = f$.
On rappelle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Même idée pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. On remplacera donc ces formules dans l'équation (E) et on déterminera a, b, c et d de telle manière que (E) ne possède plus qu'une seule dérivée partielle du type $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ ou $\dfrac{\partial g}{\partial v}$. Il restera à trouver g puis f.

Exercice 02

À tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on associe :

$$\phi(P)(X) = \int_X^{X+1} P(t)\,dt.$$

1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer son déterminant.

Indications : 1. Il faut montrer que ϕ est linéaire soit $\phi(P + aQ) = \phi(P) + a\phi(Q)$ puis que $\phi(P)(X)$ reste un polynôme de degré au plus 2. Le mieux est de calculer $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$.
Ici, on utilisera : $\phi(X^k) = \displaystyle\int_X^{X+1} t^k\,dt$.
2. Il faut la matrice de ϕ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Ses colonnes sont les coefficients de $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.

Correction

Exercice 01

Exercice 02