TELECOLLE KADDOURI
Enoncé

Exercice 01

On suppose que le nombre d'atomes désintégrés, pendant une heure, d'un matériau radioactif suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. On a entreposé un dispositif de détection (imparfait) susceptible de se déclencher en cas de désintégration. On admet que la probabilité pour que le dispositif ne se déclenche pas, après n désintégrations, vaut $(0.8)^n$.
L'expérience dure exactement une heure.
Notons X le nombre d'atomes désintégrés, pendant l'heure de l'expérience.
Notons D l'événement : ≪ le dispositif s'est déclenché au cours de l'expérience ≫ et donc $\overline{D}$ est : ≪ le dispositif ne s'est pas déclenché au cours de l'expérience ≫.
On rappelle enfin que e vaut à peu près 2.72 et que $P_A(B)$ désigne la probabilité conditionnelle d'avoir B sachant A.

1. Que vaut la probabilité conditionnelle $P_{(X=n)}\left(\overline{D}\right)$?
2. Justifier que $P\left(\overline{D}\right)$ vaut :
$$P_{(X=0)}\left(\overline{D}\right)P(X=0) + P_{(X=1)}\left(\overline{D}\right)P(X=1) + ... + P_{(X=n)}\left(\overline{D}\right)P(X=n) + ...$$
3. Écrire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n)$. Calculer $P(X = 4)$.
4. En déduire l'expression de $P\left(\overline{D}\right)$ sous forme d'une puissance de e.
(On remarquera que $(0.8)^n 5^n = 4^n$.)
5. On constate finalement au bout de l'expérience que le dispositif ne s'est pas déclenché.
   (a) Écrire $P_{\left(\overline{D}\right)}(X = 4)$ en fonction des trois probabilités $P_{X=4}\left(\overline{D}\right)$, $P(X = 4)$ et $P\left(\overline{D}\right)$.
   (b) Calculer explicitement la probabilité qu'il y ait eu exactement 4 désintégrations.

Indications : 4. On sait que pour tout réel a, e^a vaut $1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + ... + \dfrac{a^n}{n!} + ...$

Exercice 02

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, considérons les vecteurs
$$\vec{u} = e_1 + e_2 + e_3 + e_4,\ \vec{v} = 2e_2 + 3e_4 \text{ et } F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}).$$
On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer la projection orthogonale sur F de $\vec{w}(1, 0, 1, 0)$.

Indications : 1. On applique le procédé de Gram-Schmidt appliqué à $(\vec{u}, \vec{v})$.
2. On applique la formule qui donne la projection orthogonale d'un vecteur dans un sous-espace vectoriel où on connaît une base orthonormée.

Correction