TELECOLLE DALZOTTO
Enoncé

Exercice 01

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) & = & 0 & \end{array}\right.$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$. Donner pour $x \neq 0$, la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f en x.
2. Montrer que f est continue à gauche en 0.
3. f est-elle dérivable à gauche en 0 ? Dans l'affirmative, donner la valeur de la dérivée à gauche de f en 0, notée $f'_g(0)$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?
4. Donner le tableau de variations de f. On fera figurer les limites en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0 (par valeurs supérieures et inférieures).
   Tracer la courbe représentative de f. On précisera les asymptotes éventuelles.

Indications : 2. Il faut montrer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.
3. On calcule $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour la dérivabilité à gauche en 0. Idem avec $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour la dérivabilité à droite en 0.

Exercice 02

1. Déterminer le rang de la matrice U, carrée d'ordre n, qui n'a que des 1 sur la dernière ligne, la première et la dernière colonne et des 0 partout ailleurs.
2. Donner une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
3. ***En supplèment, s'il reste du temps :*** On note C un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle. Montrer qu'il existe un vecteur D tel que $C = UD$, puis montrer que C est de la forme $(a\ .\ .\ .\ a\ b)^T$.
   Montrer que : $a + b = \lambda a$, $(n-1)a + b = \lambda b$, puis que λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire le spectre de U.

Indications : 1. On pourra s'exercer sur une matrice carrée d'ordre 2 à 4 pour voir. On comptera les colonnes indépendantes.
2. On rappelle que $\operatorname{dim}\operatorname{Ker} U = n - \operatorname{Rg} U$.
3. On écrit $UC = \lambda C$ avec $\lambda \neq 0$. Donc en posant $D = \dfrac{1}{\lambda} C$, on a : $UD = C$.
Puis on prend $(x_1, ..., x_n)$ appartenant au sous-espace propre associé à λ, on écrit :

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On a un système et on montre que $(x_1, ..., x_n)$ est de la forme $(a, ..., a, b)$.
On montre alors les relations entre a, b et λ demandées. On en déduit une relation entre λ et n seulement. Ce doit être une équation du second degré (1) en λ. On détermine alors le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a alors la même équation (1).

Correction

Exercice 01

Exercice 02