TELECOLLE RIZZO
Enoncé

Exercice 01

Trois coffres, notés A_1, A_2 et A_3 ont chacun 2 tiroirs et dans chaque tiroir, il y a une pièce de monnaie. Les deux pièces du coffre A_1 sont des Louis d'or, les deux pièces du coffre A_2 sont des Talers en argent et les deux pièces de A_3 sont un Louis d'or et un Taler en Argent.
On rappelle que la notation $P_A(B)$ désigne la probabilité conditionnelle d'avoir B sachant A.

1. On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on observe la première pièce sur laquelle on tombe.
   On note pour tout entier $i \in [\![1, 3]\!]$, l'événement A_i : « le tiroir ouvert appartient au coffre A_i. »
   On note E l'événement : « la pièce observée est un Taler en argent. »
   (a) Calculer $P(A_i)$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$.
   (b) Calculer chacune des probabilités conditionnelles $P_{A_i}(E)$ c'est-à-dire la probabilité d'observer un Taler sachant que l'on a ouvert un tiroir du coffre A_i.
   (c) Calculer la probabilité d'observer un Taler, c'est-à-dire $P(E)$.
   (d) Calculer la probabilité que l'on a observé une pièce de A_2 sachant que c'est un Taler d'argent.
2. On ouvre de nouveau et indépendamment de la première fois l'un des six tiroirs et on observe encore une pièce. On note, pour tout couple d'entiers $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, F_{ij} l'événement : « le premier tiroir ouvert appartient à A_i et le second à A_j. »
   Enfin, G est l'événement : « on a observé deux fois des Talers d'argent. »
   (a) Justifier que $P(F_{ij}) = \dfrac{1}{9}$.
   (b) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{F_{ij}}(G)$.
   (c) En déduire la probabilité d'avoir observé deux fois des Talers d'argent.

Indications : certaines questions sont très simples car c'est dans l'énoncé et pour d'autres, il faut utiliser la formule des probabilités totales (calcul de $P(E)$ par exemple) et formule de Thomas Bayes (calcul de $P_E(A_2)$ par exemple).

Exercice 02

1. Déterminer la partie réelle de $(1 + i)^n$, où $n \in \mathbf{N}$.
2. Développer en série entière :
$$x \mapsto (\cos x)e^x.$$
   Préciser son rayon de convergence.

Indications : 1. On pourra mettre $1 + i$ sous forme trigonométrique.
2. Il n'est pas question de faire le D.S.E de $x \mapsto \cos x$ et celui de $x \mapsto e^x$ puis de faire le produit. Par contre, on peut remarquer que $(\cos x)e^x$ est la partie réelle de $e^{(1+i)x}$. On écrit donc le D.S.E de $x \mapsto e^u$ puis on remplace u par $(1 + i)x$. Et il est temps d'user de **1.**

Correction

Exercice 01

Trois coffres, notés A_1, A_2 et A_3 ont chacun 2 tiroirs et dans chaque tiroir, il y a une pièce de monnaie. Les deux pièces du coffre A_1 sont des Louis d'or, les deux pi`eces du coffre A_2 sont des Talers en argent et les deux pièces de A_3 sont un Louis d'or et un Taler en Argent.

1-a On ouvre au hasard l'un des 6 tiroirs et on observe une pièce.
On note pour tout entier $i \in [\![1, 3]\!]$, l'événement A_i : ≪ le tiroir ouvert appartient au coffre A_i. ≫
On note E l'événement : ≪ la pièce observée est un Taler en argent. ≫ Alors :

$$P(A_i) = \frac{1}{3} \text{ pour tout } i \in [\![1, 3]\!].$$

1-b La probabilité $P_{A_1}(E)$ d'observer un Taler sachant que l'on a ouvert un tiroir du coffre A_1 est 0.
La probabilité $P_{A_2}(E)$ d'observer un Taler sachant que l'on a ouvert un tiroir du coffre A_2 est 1.
La probabilité $P_{A_3}(E)$ d'observer un Taler sachant que l'on a ouvert un tiroir du coffre A_3 est $\frac{1}{2}$.

1-c La probabilité de prendre un Taler, c'est-à-dire $P(E)$ est, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(E) = P_{A_1}(E)P(A_1) + P_{A_2}(E)P(A_2) + P_{A_3}(E)P(A_3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

1-d Calculons la probabilité que l'on a observé une pièce de A_2 sachant que c'est un Taler d'argent, c'est-à-dire $P_E(A_2)$. On utilise la formule de Thomas Bayes :

$$P_E(A_2) = \frac{P_{A_2}(E)P(A_2)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

2-a On ouvre de nouveau et indépendamment de la première fois l'un des six tiroirs et on observe encore la première pièce sur laquelle on tombe. On note, pour tout couple d'entiers $(i, j) \in [\![1, 3]\!]^2$, F_{ij} l'événement : ≪ le premier tiroir ouvert appartient à A_i et le second à A_j. ≫
Enfin, G est l'événement : ≪ on a observé deux fois des Talers d'argent. ≫
F_{ij} signifie que l'on a ouvert le coffre A_i avec une probabilité de $1/3$ et ensuite le coffre A_j, toujours avec une probabilité de $1/3$ et de façon indépendante. On en déduit que :

$$P(F_{ij}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

2-b Calculons les probabilités conditionnelles $P_{F_{ij}}(G)$.
On peut remarquer que $P_{F_{ij}}(G) = P_{A_i}(E)P_{A_j}(E)$ car il y a indépendance. Donc :

$$P_{F_{ij}}(G) = 0 \text{ si } i \text{ ou } j \text{ vaut } 1.$$

$$P_{F_{22}}(G) = 1,\ P_{F_{23}}(G) = P_{F_{32}}(G) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } P_{F_{33}}(G) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2-c La probabilité d'avoir observé deux fois des Talers d'argent, c'est-à-dire $P(G)$ est encore, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(G) = \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Exercice 02

1. Déterminons la partie réelle de $(1+i)^n$, où $n \in \mathbf{N}$.
On a : $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Donc :

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}} e^{in\frac{\pi}{4}}.$$

Donc :

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

La partie réelle de $(1+i)^n$ est :

$$2^{\frac{n}{2}} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Développons en série entière :

$$x \mapsto (\cos x)e^x.$$

Il n'est pas question de faire le D.S.E de $x \mapsto \cos x$ et celui de $x \mapsto e^x$ puis de faire le produit. Par contre, on peut remarquer que $(\cos x)e^x$ est la partie réelle de $e^{(1+i)x}$. On écrit donc le D.S.E de $x \mapsto e^u$ puis on remplace u par $(1+i)x$.
On a alors pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} \Rightarrow e^{(1+i)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n.$$

Donc :

$$(\cos x)e^x = \mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{(1+i)^n}{n!} x^n\right).$$

Comme x^n est réel,

$$(\cos x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{(1+i)^n}{n!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) x^n.$$

Par ailleurs, étant issu du D.S.E de e^u, le rayon de convergence est $+\infty$.