TELECOLLE SANVICENTE
Enoncé

Exercice 01

On suppose que lors d'un accouchement la probabilité d'avoir des jumeaux est $\frac{1}{50}$. On suppose aussi tous les accouchements indépendants les uns des autres.
On note X_n le nombre d'accouchements avec jumeaux sur n accouchements au total.

1. Justifier que X_n suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ en fonction de n.
3. On suppose $n = 50$. Calculer la probabilité de ne pas avoir de jumeaux parmi les 50 accouchements et celle d'avoir 2 jumeaux parmi les 50 accouchements.
4. On fait une approximation de la loi de X_n par une loi de Poisson. On suppose toujours $n = 50$.
   (a) Quel est le paramètre de la loi de Poisson utilisée ici ?
   (b) Calculer de nouveau la probabilité de ne pas avoir de jumeaux parmi les 50 accouchements et celle d'avoir 2 jumeaux parmi les 50 accouchements. Comparer avec **3.**

Indications : On rappelle que si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

et que si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercice 02

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1),$$

où P' (resp. P'') désigne le polynôme dérivé première (resp. seconde) de P.

1. Vérifier que $\langle\,,\,\rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Indications : 1. On doit montrer que $\langle\,,\,\rangle$ est symétrique, puis linéaire par rapport à sa première variable par exemple puis que cette forme est positive puis définie.
2. On appliquera le procédé de Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$ en déterminant une base orthogonale puis orthonormale.
Plus précisement, on cherche a, b et c tels que les polynômes (V_1, V_2, V_3) avec

$$\begin{cases} V_1 &= 1 \\ V_2 &= X + a.1 \\ V_3 &= X^2 + b.1 + c.X \end{cases}$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.
Puis, on normalise en posant $W_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$, $W_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|}$ et $W_3 = \frac{V_3}{\|V_3\|}$.

Correction

Exercice 01

On suppose que lors d'un accouchement la probabilité d'avoir des jumeaux est $\frac{1}{50}$.
On note X_n le nombre d'accouchements avec jumeaux sur n accouchements au total.
1. Supposons Y_i la variable aléatoire égale à 1 si l'on a des jumeaux au $i^{\text{ème}}$accouchement et 0 sinon. La v.a.r X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{50} = 0.02$.. Donc :

$$X_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n.$$

Comme on suppose que tous les accouchements sont indépendants les uns des autres, les v.a.r Y_i sont mutuellement indépendantes et on sait alors que X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On rappelle alors que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k q^{n-k}$.
On résume :

$$X_n \hookleftarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{50}\right).$$

2. L'espérance $E(X_n)$ vaut $np = \frac{n}{50} = 0.02\, n$.
La variance $V(X_n)$ vaut $np(1-p) = \frac{49n}{2500} = 0.0196\, n$.
3. On suppose $n = 50$.
• Calculons la probabilité de ne pas avoir de jumeaux parmi les 50 accouchements.
Il s'agit de $P(X_n = 0)$.

$$\mathbb{P}(X = 0) = \left(\begin{array}{c} 50 \\ 0 \end{array} \right) (0.02)^0 (0.98)^{50} = (0.98)^{50} = 0.3642.$$

• La probabilité d'avoir 2 jumeaux parmi les 50 accouchements est $P(X_n = 2)$.

$$\mathbb{P}(X = 2) = \left(\begin{array}{c} 50 \\ 2 \end{array} \right) (0.02)^2 (0.98)^{48} = \frac{50 \times 49}{2} (0.02)^2 (0.98)^{48} = 0.1858.$$

4-a On fait une approximation de la loi de X_n par une loi de Poisson. On suppose toujours $n = 50$. Le paramètre de la loi de Poisson utilisée ici est $\lambda = np = 1$.
4-b • Calculons de nouveau la probabilité de ne pas avoir de jumeaux parmi les 50 naissances.

$$P(X_n = 0) = e^{-1} \frac{1^0}{0!} = 0.367.$$

• Calculons de nouveau la probabilité d'avoir 2 jumeaux parmi les 50 accouchements.

$$P(X_n = 2) = e^{-1} \frac{1^2}{2!} = 0.184.$$

On voit que c'est assez proche des valeurs exactes. On peut d'ailleurs rappeler que l'approximation de Poisson est bonne ici (car $np < 5$).

Exercice 02

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire :

$$\Phi(P,Q) = \langle P,\, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1),$$

où P' (resp. P'') désigne le polynôme dérivé première (resp. seconde) de P.
Vérifions que $\langle\, ,\, \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Il faut montrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

Symétrie

Pour tout couple $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$,

$$\langle P,\, Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

et

$$\langle Q,\, P\rangle = Q(1)P(1) + Q'(1)P'(1) + Q''(1)P''(1).$$

Ce sont les mêmes quantités. On a bien : $\langle P,\, Q\rangle = \langle Q,\, P\rangle$.

Bilinéarité

Pour tout $(P,Q,R) \in (\mathbb{R}_2[X])^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\langle P,\, Q+\alpha R\rangle$

$$\begin{aligned}
&= P(1)(Q(1)+\alpha R(1)) + P'(1)(Q'(1)+\alpha R'(1)) + P''(1)(Q''(1)+\alpha R''(1)) \\
&= P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1) \\
&+\alpha\left(P(1)R(1) + P'(1)R'(1) + P''(1)R''(1)\right) \\
&= \langle P,\, Q\rangle + \alpha\langle P,\, R\rangle.
\end{aligned}$$

Forme définie et positive

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a déjà l'inégalité :

$$\langle P,\, P\rangle = P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 \geqslant 0.$$

La forme $\langle\, ,\, \rangle$ est bien positive. Puis :

$$\langle P,\, P\rangle = 0 \Rightarrow P(1)^2 = P'(1)^2 = P''(1)^2 = 0.$$

Cela implique que 1 est racine au moins triple de P, polynôme de degré au plus 2. Et P est nul car si 1 est racine au moins double, $P = a(X-1)^2$ et alors $P'' = 2a$, comme $P''(1) = 0$, alors $a = 0$ et $P = 0$. La forme $\langle\, ,\, \rangle$ est définie.
On peut conclure :

$$\Phi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_2[X].$$

2. Déterminons une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
On applique le procédé de Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$ en déterminant une base orthogonale puis orthonormale.
Plus précisement, on cherche a, b et c tels que les polynômes (V_1, V_2, V_3) avec

$$\begin{cases} V_1 & = 1 \\ V_2 & = \quad X + a.1 \\ V_3 & = \quad X^2 + b.1 + c.X \end{cases}$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$V_1(1) = 1,\ V_1'(1) = 0,\ V_1''(1) = 0,\ V_2(1) = 1+a,\ V_2'(1) = 1,\ V_2''(1) = 0,\ V_3(1) = 1+b+c,\ V_3'(1) = 2+c,\ V_3''(1) = 2.$$

On a :

$$\Psi(V_1, V_2) = \Psi(V_1, V_3) = \Psi(V_2, V_3) = 0.$$

Cela donne le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1+a & = 0 & \\ 1+b+c & = & 0 \\ (1+a)(1+b+c)+2+c & = & 0 \end{array}\right.$$

Cela donne : $a=-1$, $b=1$ et $c=-2$. Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{lcc} V_1 & = 1 & \\ V_2 & = & X-1 \\ V_3 & = & X^2-2X+1=(X-1)^2 \end{array}\right.$$

Puis, on normalise en posant $W_1=\dfrac{V_1}{\|V_1\|}$, $W_2=\dfrac{V_2}{\|V_2\|}$ et $W_3=\dfrac{V_3}{\|V_3\|}$. Ici :

$$\|V_1\|^2=\Psi(V_1,V_1)=1,\ \|V_2\|^2=\Psi(V_2,V_2)=1,\ \|V_3\|^2=\Psi(V_3,V_3)=4.$$

Il reste :

$$\left\{\begin{array}{lcc} W_1 & = 1 & \\ W_2 & = & X-1 \\ & & \\ W_3 & = & \dfrac{1}{2}(X-1)^2 \end{array}\right.$$