TELECOLLE VERBAEYS
Enoncé

Exercice 01

Résoudre l'équation

$$(E)\,:\,\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x.$$

Indications : on note $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(u=ax+by,\ v=cx+dy)$ et g telle que : $g\,o\,h=f$.
On rappelle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Même idée pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. On remplacera donc ces formules dans l'équation (E) et on déterminera a,b,c et d de telle manière que (E) ne possède plus qu'une seule dérivée partielle du type $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ ou $\dfrac{\partial g}{\partial v}$. Il restera à trouver g puis f.

Exercice 02

À tout polynôme $P\in\mathbb{R}_2[X]$, on associe :

$$\phi(P)(X)=\int_X^{X+1}P(t)\,dt.$$

1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer son déterminant.

Indications : 1. Il faut montrer que ϕ est linéaire soit $\phi(P+aQ)=\phi(P)+a\phi(Q)$ puis que $\phi(P)(X)$ reste un polynôme de degré au plus 2. Le mieux est de calculer $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$.
Ici, on utilisera : $\phi(X^k)=\displaystyle\int_X^{X+1}t^k\,dt$.
2. Il faut la matrice de ϕ dans la base canonique $(1,X,X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Ses colonnes sont les coefficients de $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$ dans la base canonique $(1,X,X^2)$.

Correction

Exercice 01

Il s'agit de résoudre l'équation :

$$(E) : \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.$$

On note $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (u = ax+by,\, v = cx+dy)$ et g telle que : $g\,o\,h = f$.
On rappelle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Et de même,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Puis, on calcule les dérivées partielles qui concernent u et v,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a,\ \frac{\partial v}{\partial x} = c,\ \frac{\partial u}{\partial y} = b,\ \frac{\partial v}{\partial y} = d.$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a\frac{\partial g}{\partial u} + c\frac{\partial g}{\partial v} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = b\frac{\partial g}{\partial u} + d\frac{\partial g}{\partial v}.$$

On remplace alors ces formules dans l'équation (E) :

$$a\frac{\partial g}{\partial u} + c\frac{\partial g}{\partial v} + 2\left(b\frac{\partial g}{\partial u} + d\frac{\partial g}{\partial v}\right) = x.$$

On en déduit :

$$(a+2b)\frac{\partial g}{\partial u} + (c+2d)\frac{\partial g}{\partial v} = x.$$

On détermine a, b, c et d de telle manière que (E) ne possède plus qu'une seule dérivée partielle du type $\frac{\partial g}{\partial u}$ ou $\frac{\partial g}{\partial v}$. Par exemple, on garde $\frac{\partial g}{\partial u}$ et on suppose :

$$a + 2b = 1 \text{ et } c + 2d = 0.$$

Cela donne : $a = 1$, $b = 0$, $c = -2$ et $d = 1$. Donc :

$$x = u \text{ et } v = -2x + y.$$

Notre équation (E) devient :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = u.$$

Alors il existe une fonction K de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :

$$\forall (u,v) \in \mathbf{R}^2,\ g(u,v) = \frac{u^2}{2} + K(v).$$

Donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x,y) = \frac{x^2}{2} + K(-2x+y).$$

Exercice 02

À tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on associe :

$$\phi(P)(X) = \int_X^{X+1} P(t)\,dt.$$

Vérifions que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

- Il faut d'abord montrer que ϕ est linéaire soit $\phi(P + aQ) = \phi(P) + a\phi(Q)$.

$$\phi(P + aQ)(X) = \int_X^{X+1} (P(t) + aQ(t))\,dt = \int_X^{X+1} P(t)\,dt + a\int_X^{X+1} Q(t)\,dt.$$

C'est bien $\phi(P) + a\phi(Q)$.

- Il faut ensuite montrer que $\phi(P)(X)$ reste un polynôme de degré au plus 2.

Le mieux est de calculer $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$. En effet, ϕ est linéaire. On utilisera :

$$\phi(X^k) = \int_X^{X+1} t^k\,dt.$$

On a :

$$\phi(1) = \int_X^{X+1} dt = X + 1 - X = 1.$$

Puis :

$$\phi(X) = \int_X^{X+1} t\,dt = \frac{1}{2}((X+1)^2 - X^2) = \frac{1}{2}(1 + 2X).$$

Et enfin :

$$\phi(X^2) = \int_X^{X+1} t^2\,dt = \frac{1}{3}((X+1)^3 - X^3) = \frac{1}{3}(1 + 3X + 3X^2).$$

On remarque que $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$ sont des polynômes de degré au plus 2.

2. Il faut la matrice de ϕ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Ses colonnes sont les coefficients de $\phi(1)$, $\phi(X)$ et $\phi(X^2)$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$. On a :

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est immédiatement 1.