TELECOLLE KADDOURI
Enoncé

Exercice 01

On suppose que le nombre d'atomes désintégrés, pendant une heure, d'un matériau radioactif suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. On a entreposé un dispositif de détection (imparfait) susceptible de se déclencher en cas de désintégration. On admet que la probabilité pour que le dispositif ne se déclenche pas, après n désintégrations, vaut $(0.8)^n$.
L'expérience dure exactement une heure.
Notons X le nombre d'atomes désintégrés, pendant l'heure de l'expérience.
Notons D l'événement : « le dispositif s'est déclenché au cours de l'expérience » et donc $\overline{D}$ est : « le dispositif ne s'est pas déclenché au cours de l'expérience ».
On rappelle enfin que e vaut à peu près 2.72 et que $P_A(B)$ désigne la probabilité conditionnelle d'avoir B sachant A.

1. Que vaut la probabilité conditionnelle $P_{(X=n)}\left(\overline{D}\right)$?
2. Justifier que $P\left(\overline{D}\right)$ vaut :
$$P_{(X=0)}\left(\overline{D}\right) P(X=0) + P_{(X=1)}\left(\overline{D}\right) P(X=1) + ... + P_{(X=n)}\left(\overline{D}\right) P(X=n) + ...$$
3. Écrire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n)$. Calculer $P(X=4)$.
4. En déduire l'expression de $P\left(\overline{D}\right)$ sous forme d'une puissance de e.
(On remarquera que $(0.8)^n 5^n = 4^n$.)
5. On constate finalement au bout de l'expérience que le dispositif ne s'est pas déclenché.
   (a) Écrire $P_{\left(\overline{D}\right)}(X=4)$ en fonction des trois probabilités $P_{X=4}\left(\overline{D}\right)$, $P(X=4)$ et $P\left(\overline{D}\right)$.
   (b) Calculer explicitement la probabilité qu'il y ait eu exactement 4 désintégrations.

Indications : 4. On sait que pour tout réel a, e^a vaut $1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + ... + \dfrac{a^n}{n!} + ...$

Exercice 02

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, considérons les vecteurs
$$\vec{u} = e_1 + e_2 + e_3 + e_4,\ \vec{v} = 2e_2 + 3e_4 \text{ et } F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}).$$
On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer la projection orthogonale sur F de $\vec{w}(1, 0, 1, 0)$.

Indications : 1. On applique le procédé de Gram-Schmidt appliqué à $(\vec{u},\ \vec{v})$.
2. On applique la formule qui donne la projection orthogonale d'un vecteur dans un sous-espace vectoriel où on connaît une base orthonormée.

Correction

Exercice 01

On suppose que le nombre d'atomes désintégrés, pendant une heure, d'un matériau radioactif suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. On a entreposé un dispositif de détection (imparfait) susceptible de se déclencher en cas de désintégration. On admet que la probabilité pour que le dispositif ne se déclenche pas, après n désintégrations, vaut 0.8^n.
L'expérience dure exactement une heure.
Notons X le nombre d'atomes désintégrés, pendant l'heure de l'expérience.
Notons D l'événement : ≪ le dispositif s'est déclenché au cours de l'expérience ≫ et donc $\overline{D}$ est : ≪ le dispositif ne s'est pas déclenché au cours de l'expérience ≫.

1. La probabilité conditionnelle $P_{X=n}\left(\overline{D}\right)$ est 0.8^n d'après l'énoncé.

2. X peut prendre les valeurs 0, 1, ..., n, ... et les événements $(X = 0)$, $X = 1)$, ...,$(X = n)$, etc. sont deux à deux incompatibles. Ils forment un système complet dévénements (dénombrable) et on peut étendre la formule des probabilités totales. Ainsi $P\left(\overline{D}\right)$ vaut :

$$P_{X=0}\left(\overline{D}\right) P(X=0) + P_{X=1}\left(\overline{D}\right) P(X=1) + ... + P_{X=n}\left(\overline{D}\right) P(X=n) + ...$$

3. Écrivons pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n)$.
On sait que X suit la loi de Poisson de paramètre 5. On a :

$$P(X = n) = e^{-5}\frac{5^n}{n!}.$$

Donc : $P(X = 4) = e^{-5}\dfrac{5^4}{4!} = 0.175$.

4. On admet que pour tout réel a, e^a vaut $1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + ... + \dfrac{a^n}{n!} + ...$
On va en déduire l'expression de $P\left(\overline{D}\right)$ sous forme d'une puissance de e.
En effet, en utilisant la question **2.** et la question **3.**, $P\left(\overline{D}\right)$ vaut :

$$(0.8)^0 e^{-5}\frac{5^0}{0!} + (0.8)^1 e^{-5}\frac{5^1}{1!} + ... + (0.8)^n e^{-5}\frac{5^n}{n!} + ...$$

C'est-à-dire :

$$e^{-5}\left((0.8)^0\frac{5^0}{0!} + (0.8)^1\frac{5^1}{1!} + ... + (0.8)^n\frac{5^n}{n!} + ...\right).$$

C'est-à-dire encore (car $0.8^n 5^n = 4^n$) :

$$e^{-5}\left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + ... + \frac{4^n}{n!} + ...\right).$$

Et donc : $P\left(\overline{D}\right)$ vaut :

$$e^{-5}e^4 = e^{-1}.$$

5-a. Écrivons $P_{\left(\overline{D}\right)}(X = 4)$ en fonction des trois probabilités $P_{X=4}\left(\overline{D}\right)$, $P(X = 4)$ et $P\left(\overline{D}\right)$.
C'est la formule de Thomas Bayes :

$$P_{\left(\overline{D}\right)}(X = 4) = \frac{P_{X=4}\left(\overline{D}\right)\ P(X = 4)}{P\left(\overline{D}\right)}.$$

5-b. Calculons explicitement la probabilité qu'il y ait eu exactement 4 désintégrations. Comme on a constaté finalement au bout de l'expérience que le dispositif ne s'est pas déclenché, il s'agit de calculer $P_{\left(\overline{D}\right)}(X = 4)$.

On a :

$$P_{(\overline{D})}(X=4) = \frac{(0.8)^4 \times 0.175}{(2.72)^{-1}} = 0.195.$$

Exercice 02

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, considérons les vecteurs

$$\vec{u} = e_1 + e_2 + e_3 + e_4,\ \vec{v} = 2e_2 + 3e_4 \text{ et } F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}).$$

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique.

1. Déterminons une base orthonormée de F. On applique le procédé de Gram-Schmidt appliqué à $(\vec{u},\ \vec{v})$. On remplace $\vec{v}$ par ($\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ désigne le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$) :

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = (0,2,0,3) - \frac{5}{4}(1,1,1,1) = \frac{1}{4}(-5,3,-5,7),$$

Il reste à calculer $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 4$ et $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle = \frac{1}{16}(25+9+25+49) = \frac{27}{4}$. La base orthonormale est donc :

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \text{ et } \vec{v}_2 = \frac{2}{\sqrt{27}}\frac{1}{4}(-5,3,-5,7) = \frac{1}{\sqrt{108}}(-5,3,-5,7).$$

2. Déterminons la projection orthogonale sur F de $\vec{w}(1,0,1,0)$.
On applique la formule :
Le projeté de $\vec{w} = (x,y,z,t)$ sur F est donc :

$$\begin{array}{rcl} p(\vec{w}) & = & \langle \vec{w}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 + \langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 \\ & = & \dfrac{x+y+z+t}{4}(1,1,1,1) + \dfrac{(-5x+3y-5z+7t)}{108}(-5,3,-5,7) \\ & = & \dfrac{1}{27}\big((13x+3y+13z-2t), 3(x+3y+z+4t) \\ & & \qquad (13x+3y+13z-2t), (-2x+12y-2z+19t)\big) \end{array}$$

On applique avec $x=1, y=0, z=1, t=0$. On obtient :

$$p(\vec{w}) = \frac{1}{27}(26,6,26,-4).$$

Remarque : La matrice de la projection orthogonale de E sur F est :

$$\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 13 & 3 & 13 & -2 \\ 3 & 9 & 3 & 12 \\ 13 & 3 & 13 & -2 \\ -2 & 12 & -2 & 19 \end{pmatrix}.$$