TELECOLLE DALZOTTO
Enonce

Exercice 01

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & e^{\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) & = & 0 & \end{array}\right.$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$. Donner pour $x \neq 0$, la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f en x.
2. Montrer que f est continue à gauche en 0.
3. f est-elle dérivable à gauche en 0 ? Dans l'affirmative, donner la valeur de la dérivée à gauche de f en 0, notée $f'_g(0)$. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?
4. Donner le tableau de variations de f. On fera figurer les limites en $-\infty$, en $+\infty$ et en 0 (par valeurs supérieures et inférieures).
   Tracer la courbe représentative de f. On précisera les asymptotes éventuelles.

Indications : 2. Il faut montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.
3. On calcule $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ pour la dérivabilité à gauche en 0. Idem avec $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ pour la dérivabilité à droite en 0.

Exercice 02

1. Déterminer le rang de la matrice U, carrée d'ordre n, qui n'a que des 1 sur la dernière ligne, la première et la dernière colonne et des 0 partout ailleurs.
2. Donner une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.
3. ***En supplèment, s'il reste du temps :*** On note C un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle. Montrer qu'il existe un vecteur D tel que $C = UD$, puis montrer que C est de la forme $(a \ . \ . \ . \ a \ b)^T$.
   Montrer que : $a + b = \lambda a$, $(n-1)a + b = \lambda b$, puis que λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$.
   En déduire le spectre de U.

Indications : 1. On pourra s'exercer sur une matrice carrée d'ordre 2 à 4 pour voir. On comptera les colonnes indépendantes.
2. On rappelle que $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,U = n - \mathrm{Rg}\,U$.
3. On écrit $UC = \lambda C$ avec $\lambda \neq 0$. Donc en posant $D = \dfrac{1}{\lambda}C$, on a : $UD = C$.
Puis on prend $(x_1, ..., x_n)$ appartenant au sous-espace propre associé à λ, on écrit :

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On a un système et on montre que $(x_1, ..., x_n)$ est de la forme $(a, ..., a, b)$.
On montre alors les relations entre a, b et λ demandées. On en déduit une relation entre λ et n seulement. Ce doit être une équation du second degré (1) en λ. On détermine alors le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a alors la même équation (1).

Correction

Exercice 01

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) & = & e^{\frac{1}{x}} & \text{si} & x \neq 0 \\ f(0) & = & 0 \end{cases}$.

1. Justifions que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^\star$ et $u \mapsto e^u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Donc par composition, f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^\star$.

Donnons pour $x \neq 0$, la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f en x. On a :

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}.$$

2. Montrons que f est continue à gauche en 0.

Il faut montrer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Or, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ et donc

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

On en déduit que f est continue à gauche en 0.

3. f est-elle dérivable à gauche en 0 ? Dans l'affirmative, donnons la valeur de la dérivée à gauche de f en 0, notée $f'_g(0)$.

On calcule $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour la dérivabilité à gauche en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0.$$

En effet, l'exponentielle tend vers 0 plus vite que $1/x$ tend vers $-\infty$. On a :

$$f'_g(0) = 0.$$

La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? On refait pareil.

On calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour la dérivabilité à droite en 0. On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = +\infty.$$

En effet, l'exponentielle et $1/x$ tendent vers $+\infty$. Donc, f ne présente pas de dérivabilité à droite en 0.

4. Il est clair que f' est à valeurs strictement négatives. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Pour les limites en $-\infty$, en $+\infty$, on écrit :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

De même,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Il nous manque :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Alors $f(x)$ décroît de sur $]-\infty, 0[$ de 1 à 0 et décroît de sur $]0, , +\infty[$ de $+\infty$ à 1.

Exercice 02

1. Déterminons le rang de la matrice U, carrée d'ordre n, qui n'a que des 1 sur la dernière ligne, la première et la dernière colonne et des 0 partout ailleurs.

On pourra s'exercer sur une matrice carrée d'ordre 2 à 4 pour voir. On comptera les colonnes indépendantes.
Pour $n = 3$:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et pour $n = 4$,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'il n'y a que deux colonnes indépendantes,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc le rang de U est 2.

2. On rappelle que $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,U = n - \mathrm{Rg}\,U$. Donc $\mathsf{dim}\,\mathsf{Ker}\,U = n - 2$. On peut résoudre un système du type : $UX = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ mais il y a plus simple :

On remarque que si les colonnes de U sont $C_1, ..., C_n$ alors

$$C_1 - C_n,\ C_2 - C_3,\ C_2 - C_4,\ ...,\ C_2 - C_{n-1}$$

sont des colonnes nulles.

Cela signifie que si $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ sont les n vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, la famille :

$$\{\vec{e}_1 - \vec{e}_n,\ \vec{e}_2 - \vec{e}_3,\ ...,\ \vec{e}_2 - \vec{e}_{n-1}\}$$

est une famille libre du nouau $\mathsf{Ker}\,U$. Comme il y en a $n - 2$ et que la famille est libre (le vérifier), c'est une base de $\mathsf{Ker}\,U$.

3. ***En supplèment, s'il reste du temps :*** On note C un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle. Montrer qu'il existe un vecteur D tel que $C = UD$, puis montrer que C est de la forme $(a\ .\ .\ .\ a\ b)^T$.

Montrer que : $a + b = \lambda a$, $(n-1)a + b = \lambda b$, puis que λ est valeur propre de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$.

En déduire le spectre de U.

On écrit $UC = \lambda C$ avec $\lambda \neq 0$.

Donc en posant $D = \dfrac{1}{\lambda} C$, on a : $UD = C$.

Puis on prend $(x_1, ..., x_n)$ appartenant au sous-espace propre associé à λ, on écrit :

$$U \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On a un système et on trouve :

$$x_1 = x_2,\ x_1 = x_3,\ ...,\ x_1 = x_{n-1}.$$

Seul x_n reste indépendant des autres x_i. Donc $(x_1, ..., x_n)$ est bien de la forme $(a, ..., a, b)$.
On montre alors les relations entre a, b et λ demandées. On obtient :

$$a + b = \lambda a \text{ et } (n-1)a + b = \lambda b.$$

On en déduit une relation entre λ et n seulement :

$$\lambda^2 - 2\lambda - n + 2 = 0.$$

C'est une équation du second degré (1) en λ. On détermine alors le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a alors le même polynôme que celui de l'équation (1) :

$$\chi_U(t) = t^2 - 2t - n + 2.$$

On en déduit le spectre de U en trouvant les solutions de (1). On obtient :

$$(t-1)^2 = n - 1 \Rightarrow t = 1 \pm \sqrt{n-1}.$$

On a deux solutions et comme 0 appartient aussi au spectre, le spectre est

$$\mathrm{Sp}\,(U) = \{0,\, 1 - \sqrt{n-1},\, 1 + \sqrt{n-1}\}.$$