Devoir surveillé 06

2TSI. Mathématiques

Durée 4 heures.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

EXERCICE 01

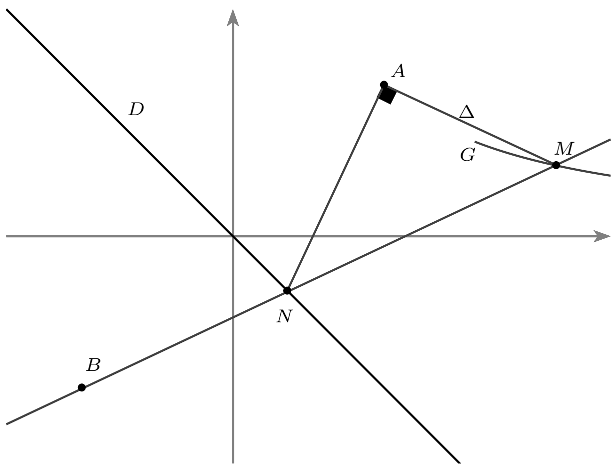
Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère les points $A(1\,;1)$, $B(-1\,;-1)$ et la droite D d'équation :

$$y = -x.$$

Pour un point N de D de coordonnées $(t\,;-t)$, on considère la droite (BN), la droite (AN) et la droite Δ passant par A et perpendiculaire à la droite (AN).

Le point M est l'intersection, si elle existe, de la droite (BN) et de la droite Δ.

1. En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite (BN).
2. En fonction de t, donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AN}$.
3. En fonction de t, donner une équation cartésienne de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à (AN).
4. Pour quelles valeurs de t, les droites (BN) et Δ sont-elles parallèles ? On trouvera deux valeurs notées dans la suite t_1 et t_2.
5. Calculer en fonction de t les coordonnées du point L en résolvant un système formé par les équations des droites (BN) et Δ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$.
   On appelle désormais G la courbe décrite par M quand N parcourt la droite D.
6. On note $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions telles que :
   $$u(t) = \frac{t+1}{-t+1} = \frac{2}{-t+1} - 1 \text{ et } v(t) = \frac{-t+1}{t+1} = \frac{2}{t+1} - 1$$
   (a) Préciser les domaines de définition de u et v.
   (b) Calculer les dérivées de u et v et préciser les sens de variation de u et v sur chaque intervalle ou elles sont définies.
   (c) Donner un tableau de variations conjointes de u et v en précisant leurs limites aux extrémités de chaque intervalle où elles sont définies.
   On ne demande pas de représentation de u et v.
7. (a) Le point A appartient–il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
   (b) Le point B appartient–il à G ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de t qui lui est associée ?
8. (a) Calculer $u(t)v(t)$. Que remarque–t–on ?
   (b) On appelle H la courbe d'équation cartésienne $y = \dfrac{1}{x}$.
   Peut–on déduire de ce qui précède que G est la courbe H dont on a retiré un ou plusieurs points ? Quel(s) point(s) retirer à H pour obtenir G ?



EXERCICE 02

On considère l'équation différentielle, définie pour $x \in]0;+\infty[$, de fonction inconnue y :

$$xy'(x) - y(x) = \arctan(x) \tag{E}$$

et l'équation homogène associée (H) : $xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Déterminer la solution générale de (H).
2. Montrer que la résolution de (E) peut se ramener à calculer l'intégrale :

$$K(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}\,du \qquad \text{pour } x \in]0,+\infty[.$$

   Justifier que cette intégrale est convergente.
3. Par une intégration par parties, exprimer $K(x)$ à l'aide de l'intégrale d'une fraction rationnelle.
4. Déterminer trois réels α , β , γ tels que : $\forall u \in \mathbf{R}^*$, $F(u) = \dfrac{1}{u(u^2+1)} = \dfrac{\alpha}{u} + \dfrac{\beta u + \gamma}{u^2+1}$.
5. En déduire le calcul de l'intégrale $K(x)$, puis la solution générale y de (E), en fonction d'une constante d'intégration C.
6. Montrer que $\lim\limits_{y \to 0^+} y(x)$ existe et calculer cette limite.

EXERCICE 03

Soit la courbe $\mathbf{C}$ de représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$

$$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin\alpha \\ y(\alpha) = 1 - \cos\alpha \end{cases}$$

avec $\alpha \in \mathbf{R}$. On note $\mathbf{M}(\alpha)$ le point de paramètre α de $\mathbf{C}$.

1. (a) Préciser la parité des fonctions x et y. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathbf{C}$.
   (b) Donner les coordonnées du milieu du segment $[\mathbf{M}(\alpha), \mathbf{M}(2\pi - \alpha)]$. En déduire une symétrie pour la courbe $\mathbf{C}$.
   (c) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{M}(\alpha)\mathbf{M}(\alpha + 2\pi)}$. Montrer qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe $\mathbf{C}$ invariante.
   (d) Déduire de ce qui précède toutes les symétries de la courbe $\mathbf{C}$.
2. (a) Faire une étude conjointe des fonctions x et y sur $[0, 2\pi]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)
   (b) Déterminer la limite $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \dfrac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$. On admettra qu'il en résulte que $\mathbf{C}$ admet une tangente verticale en $\mathbf{M}(0)$.
   (c) Donner une représentation graphique de $\mathbf{C}$ pour $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$

   On suppose maintenant que $\alpha \in]0, \pi[$. On note $\mathbf{M}$ le point $\mathbf{M}(\alpha)$ de $\mathbf{C}$.
3. (a) Donner les composantes d'un vecteur directeur $\vec{t}$ de la tangente $\mathbf{T}$ à $\mathbf{C}$ en $\mathbf{M}$, et d'un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale $\mathbf{N}$ à $\mathbf{C}$ en $\mathbf{M}$.
   (b) Donner une équation de la droite $\mathbf{N}$ normale à $\mathbf{C}$ en $\mathbf{M}$. Déterminer les coordonnées du point $\mathbf{U}$, intersection de $\mathbf{N}$ avec l'axe $(\mathbf{O}x)$.
   (c) Donner une équation de la droite $\mathbf{T}$ tangente à $\mathbf{C}$ en $\mathbf{M}$. Déterminer les coordonnées du point $\mathbf{V}$, intersection de $\mathbf{T}$ avec la droite d'équation $y = 2$.
   (d) Que remarque-t-on sur les abscisses des points $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$?

EXERCICE 04

On considère les fonctions 2π-périodiques, f et g définies par :

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = |x| \text{ et } g(x) = x.$$

1. (a) Préciser la parité de f ;
   (b) Déterminer la série de Fourier de la fonction f.
   On note Sf la somme de la série de la fonction f.
2. (a) Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbf{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.
   (b) En calculant $Sf(0)$, trouver la somme de la série numérique : $T = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.
3. Soit $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b non nuls tels que $S = aS + bT$.
4. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique S.
5. Appliquer la relation de Parseval à Sf et trouver la somme de la série numérique :

$$V = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

6. (a) Soit $U = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Montrer qu'il existe deux réels c et d non nuls tels que $U = cU + dV$.
   (b) À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique U.
7. (a) Préciser la parité de g.
   (b) Déterminer la série de Fourier de la fonction g. On note Sg la somme de la série de Fourier.
8. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction g sur $\mathbf{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.
9. En calculant $Sg\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, trouver la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.