$\boxed{\text{Correction DS 06 2TSI}}$

EXERCICE 01

1. Un point $M(x,y) \in (BN) \iff \overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires, si et seulement si $\mathsf{Det}\{\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BM}\} = 0$.
   On a : $\overrightarrow{BN} = (t+1, -t+1)$ et $\overrightarrow{BM} = (x+1, y+1)$. On en déduit alors

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (BN) &\iff (t+1)(y+1) - (-t+1)(x+1) = 0 \\ &\iff (t-1)x + (t+1)y + 2t = 0 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Une équation cartésienne de la droite } (BN) \text{ est } (t-1)x + (t+1)y + 2t = 0}$

2. On a $\boxed{\overrightarrow{AN} = (t-1, -t-1)}$

3. Un point $M(x,y) \in \Delta \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux, si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$.
   On a $\overrightarrow{AM} = (x-1, y-1)$ d'où l'on tire $M(x,y) \in \Delta \iff (x-1)(t-1) + (y-1)(-t-1) = 0$, soit après simplification $\boxed{\text{Une équation cartésienne de la droite } \Delta \text{ est } (t-1)x - (t+1)y + 2 = 0}$

4. Les droites (BN) et Δ sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.
   On a ici $\vec{n}_1 = (t-1, t+1)$ et $\vec{n}_2 = (t-1, -(t+1))$ et deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul soit ici

$$-(t-1)(t+1) - (t+1)(t-1) = 0$$

   après simplification $\boxed{(t-1)(t+1) = 0}$.

   $\boxed{\text{Les droites } (BN) \text{ et } \Delta \text{ sont parallèles pour } t_1 = -1 \text{ et } t_2 = 1}$

5.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in (BN) \cap \Delta &\iff \begin{cases} (t-1)x + (t+1)y + 2t = 0 \\ (t-1)x - (t+1)y + 2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2(t-1)x = -2(t+1) \\ 2(t+1)y = -2(t-1) \end{cases} \end{aligned}$$

   Or $t \neq t_1$ et $t \neq t_2$ alors

$$\boxed{M(x,y) \in (BN) \cap \Delta \iff x = -\frac{t+1}{t-1} \text{ et } y = -\frac{t-1}{t+1}}$$

6. (a) $\boxed{\text{La fonction } u \text{ est définie sur } \mathbf{R} - 1}$ et $\boxed{\text{la fonction } v \text{ est définie sur } \mathbf{R} - -1}$
   (b) Les fonctions u et v sont dérivables sur tout intervalle inclus dans leur domaine de définition, et par calcul immédiat, on obtient

$$\boxed{u'(t) = \frac{2}{(-t+1)^2}, \quad v'(t) = \frac{-2}{(t+1)^2}}$$

   $\boxed{\text{La fonction } u \text{ est strictement croissante sur }]-\infty, 1[\text{ et sur }]1, +\infty[.}$

   $\boxed{\text{La fonction } v \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, -1[\text{ et sur }]-1, +\infty[.}$

   (c) On en déduit le tableau des variations conjointes.
   On a :

$$\lim_{t\to 1^-} u(t) = +\infty, \ \lim_{t\to 1^+} u(t) = -\infty, \ \lim_{t\to -1^-} v(t) = -\infty, \ \lim_{t\to -1^+} v(t) = +\infty.$$

De même,

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = -1,\ \lim_{t\to+\infty} u(t) = -1,\ \lim_{t\to-\infty} v(t) = -1,\ \lim_{t\to+\infty} v(t) = -1.$$

(d) Courbe G :

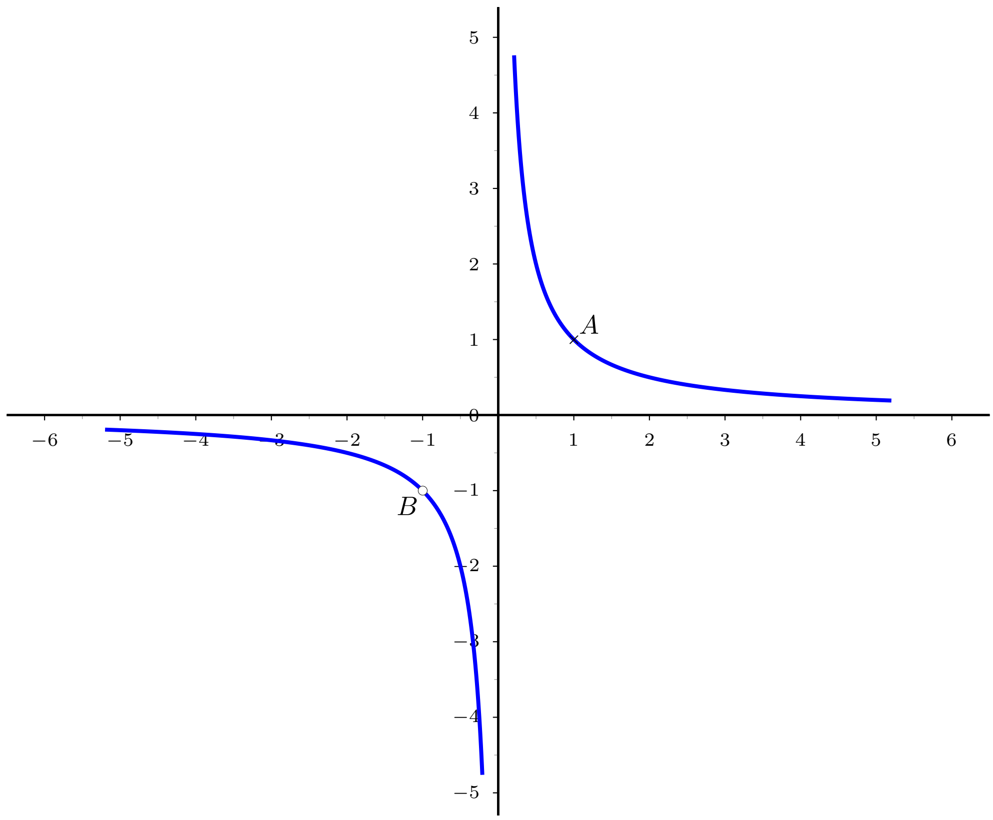

FIGURE 1 – Courbe G

7. (a) On remarque que $u(0) = v(0) = 1$.
   Par conséquent, $\boxed{\text{le point } A \text{ appartient à la courbe } G \text{ pour } t = 0.}$
   (b) D'après le tableau des variations conjointes, $u(t) \neq -1$, donc
   $\boxed{\text{le point } B \text{ n'appartient pas à la courbe } G}$
8. (a) Par calcul immédiat, on a $\boxed{u(t)v(t) = 1}$
   (b) D'après le tableau des variations conjointes, et en fait, le théorème des valeurs intermédiaires, lorsque t décrit $\mathbf{R} - -1, 1$, $u(t)$ décrit $\mathbf{R} - -1, 0$. On a alors $v(t) = \frac{1}{u(t)}$
   $\boxed{G \text{ est alors la courbe } H \text{ à laquelle on a retiré un point, le point } B.}$

EXERCICE 02

On considère l'équation différentielle, définie pour $x \in]0; +\infty[$, de fonction inconnue y :

$$xy'(x) - y(x) = \arctan(x) \tag{E}$$

et l'équation homogène associée (H) : $xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Déterminons la solution générale de (H).
   Sur $]0;+\infty[$, L'équation (H) est équivalente à
   $$y'(x) - \frac{1}{x}y(x) = 0$$
   Une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est . $A(x) = \ln(x)$.
   De là, les solutions de l'équation homogène (H) sur $]0;+\infty[$ sont de la forme
   $$y_0(x) = K\, e^{A(x)} = Kx, \qquad K \in \mathbf{R}$$
2. Montrons que la résolution de (E) peut se ramener à calculer l'intégrale :
   $$K(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}\, du \qquad \text{pour } x \in]0,+\infty[.$$
   Les solutions de l'équation (E) sur $]0;+\infty[$ sont de la forme
   $$y = y_p + y_0$$
   où y_p est une solution particulière de (E) et y_0 une solution de l'équation homogène (H).
   Il s'agit donc de déterminer une solution particulière y_p de (E). On procède à l'aide de la méthode de la variation de la constante en cherchant y_p sous la forme
   $$y_p = Ky_0$$
   où pour $x \in]0;+\infty[$, $y_0(x) = x$ est une solution de l'équation homogène (H) et K étant une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ à déterminer.
   Pour que y_p soit solution de (E), la fonction K doit vérifier :
   $$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad x(K'(x)y_0(x) + K(x)y_0'(x)) - K(x)y_0(x) = \arctan(x).$$
   C'est-à-dire
   $$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad xK'(x)y_0(x) + K(x)(xy_0'(x) - y_0(x)) = \arctan(x)$$
   et donc
   $$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad xK'(x)y_0(x) = x^2K'(x) = \arctan(x).$$
   Finalement, la fonction k doit vérifier
   $$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad K'(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2}$$
   et K est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$; une telle primitive est donnée (pour tout $x \in]0;+\infty[$) par l'intégrale
   $$K(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}[u]$$
   si elle existe.
   Justifions que cette intégrale est convergente.
   La fonction $u \longmapsto \dfrac{\arctan(u)}{u^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$ et est donc intégrable sur tout segment inclu dans $]0;+\infty[$.
   De plus, pour tout $u \in]0;+\infty[$ on a
   $$\left|\frac{\arctan(u)}{u^2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{u^2}.$$
   Le membre de droite étant intégrable en $+\infty$ car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\, du$ est une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ $(\alpha = 2 > 1)$, on en déduit par comparaison des intégrales des fonctions positives que l'intégrale
   $$K(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}\, du$$
   est bien définie.

3. Par une intégration par parties, exprimons $K(x)$ à l'aide de l'intégrale d'une fraction rationnelle.
Soit $x \in]0;+\infty[$ et $b > x$. Une intégration par partie de l'intégrale (finie) associée à $K(x)$ où l'on dérive $\arctan(x)$ et où l'on dérive $\dfrac{1}{x^2}$ donne :

$$-\int_x^b \frac{\arctan(u)}{u^2} = \left[\frac{\arctan(u)}{u}\right]_x^b - \int_x^b \frac{1}{u(u^2+1)}du$$
$$\frac{\arctan(b)}{b} - \frac{\arctan(x)}{x} - \int_x^b \frac{1}{u(u^2+1)}du$$

Comme la fonction arctangente est bornée par $\dfrac{\pi}{2}$ en valeur absolue, on en déduit que

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{\arctan(b)}{b} = 0$$

Par ailleurs, l'intégrale $-\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{u(u^2+1)}\,du$ est bien définie car $\dfrac{1}{u(u^2+1)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{u^3}$ dont l'intégrale est unt intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ ($\alpha = 3 > 1$).
On peut donc conclure que pour $x \in]0;+\infty[$:

$$K(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}\,du = -\frac{\arctan(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{u(u^2+1)}\,du$$

4. Déterminons trois réels α , β , γ tels que : $\forall u \in \mathbf{R}^*$, $F(u) = \dfrac{1}{u(u^2+1)} = \dfrac{\alpha}{u} + \dfrac{\beta u+\gamma}{u^2+1}$.
Comme le polynôme u^2+1 est irréductible sur $\mathbf{R}$ de degré 2, la décomposition en éléments simple de $\frac{1}{u(u^2+1)}$ donne l'exsistence de trois réels tel que

$$\forall u \in \mathbf{R}^*, \qquad \frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta u+\gamma}{u^2+1}.$$

En multipliant chaque membre de l'égalité par u puis en faisant tendre u vers 0, on obtient $\alpha = 1$. De même en faisant tendre u vers $+\infty$ (après multiplication par u), on obtient $\alpha + \beta = 0$ et donc $\beta = -1$. En mettant enfin au même dénominateur, on trouve $\gamma = 0$. De là, on a :

$$\forall u \in \mathbf{R}^*, \qquad \frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}.$$

5. Calculons l'intégrale $K(x)$, puis la solution générale y de (E), en fonction d'une constante d'intégration C.
En reprenant les questions 2, 3 et 4 on commence par calculer $K(x)$ pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
K(x) &= -\int_x^{+\infty} \frac{\arctan(u)}{u^2}du && \text{quest. 2}\\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{u(u^2+1)}\,du && \text{quest. 3}\\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{1+u^2}\right)du && \text{quest. 4}\\
&= -\frac{\arctan(x)}{x} + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).
\end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenu en remarquant que

$$-\int_x^b \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{1+u^2}\right)du = -\ln(b) + \frac{1}{2}\ln(1+b^2) + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

et que comme $\dfrac{\sqrt{1+b^2}}{b} \sim_\infty 1$, on a :

$$-\ln(b) + \frac{1}{2}\ln(1+b^2) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\right).$$

Et donc :

$$\lim_{b\to+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}\right) = \ln 1 = 0.$$

Ainsi, en revenant à la question 2, une solution particulière de l'équation (E) sur $]0;+\infty[$ est donnée par

$$y_p(x) = xK(x) = -\arctan(x) + x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2).$$

Les solutions de l'équation (E) sur $]0;+\infty[$ sont donc de la forme :

$$y(x) = y_O + y_p(x) = K\,x - \arctan(x) + x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2), \quad K\in\mathbf{R}.$$

où y_0 désigne une solution de l'équation homogène (H) associée à (E) et déterminée à la question 1.

Remarque : Étant donnée l'allure de la solution particulière trouvée, une vérification s'impose. En dérivant y_p on trouve pour $x>0$:

$$y_p'(x) = -\frac{1}{1+x^2} + \ln(x) + 1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2},$$

puis

$$\begin{aligned} xy_p'(x) &= -\frac{x}{1+x^2} + x\ln(x) + x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \frac{x^3}{1+x^2} \\ &= \frac{-x + x(1+x^2) + x^3}{1+x^2} + x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) \\ &= x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Comme

$$y_p(x) = -\arctan(x) + x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2).$$

on a bien

$$xy_p'(x) - y_p(x) = \arctan(x).$$

6. Montrons que $\lim_{y\to0^+} y(x)$ existe et calculons cette limite.
Soit y une solution générale de l'équation (E). On a donc $K\in\mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x>0, \qquad y(x) = Kx - \arctan(x) + x\ln(x) - \frac{x}{2}\ln(1+x^2).$$

Lorsque $x0^+$, on a d'une part : $\lim\limits_{x\to0^+} K\,x - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) = 0$;
d'autre part, part croissance comparée : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$.
Enfin

$$\lim_{x\to0^+} \arctan(x) = 0.$$

On en déduit donc que y admet une limite en 0^+ donnée par :

$$\lim_{x\to0^+} y(x) = 0.$$

EXERCICE 03

1. (a) Précisons la parité des fonctions x et y.
Soit $\alpha\in\mathbf{R}$.
On calcule simplement :

$$\begin{aligned} x(-\alpha) &= (-\alpha) - \sin(-\alpha) = -\alpha + \sin(\alpha) = -x(\alpha) \\ y(-\alpha) &= 1 - \cos(-\alpha) = 1 - \cos(\alpha) = y(\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi la fonction x est impaire et la fonction y paire. La courbe $\mathbf{C}$ est symétrique par rapport à l'axe $(\mathbf{O}y)$.

(b) Donnons les coordonnées du milieu du segment $[\mathbf{M}(\alpha), \mathbf{M}(2\pi - \alpha)]$.
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On calcule ici :

$$x(2\pi - \alpha) = (2\pi - \alpha) - \sin(2\pi - \alpha) = 2\pi - \alpha - \sin(\alpha) = 2\pi - x(\alpha)$$
$$y(2\pi - \alpha) = 1 - \cos(2\pi - \alpha) = 1 - \cos(\alpha) = y(\alpha)$$

De là le milieu du segment $[\mathbf{M}(\alpha), \mathbf{M}(2\pi - \alpha)]$ a pour coordonées

$$\left(\frac{x(\alpha) + x(2\pi - \alpha)}{2}, \frac{y(\alpha) + y(2\pi - \alpha)}{2}\right) = (\pi, y(\alpha))$$

Ainsi la courbe $\mathbf{C}$ est symétrique par rapport à la droite $x = \pi$.

(c) Donnons les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{M}(\alpha)\mathbf{M}(\alpha + 2\pi)}$.
Montrons qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe $\mathbf{C}$ invariante.
Par 2π-périodicité des fonction cos et sin on a pour tout réel α

$$x(\alpha + 2\pi) = 2\pi + x(\alpha) \quad \text{et} \quad y(\alpha + 2\pi) = y(\alpha).$$

On en déduit que pour tout réel α

$$\overrightarrow{\mathbf{M}(\alpha)\mathbf{M}(\alpha + 2\pi)} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

La courbe $\mathbf{C}$ est donc invariante par translation de vecteur

$$2k\pi\vec{i} = \begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour $k \in \mathbf{Z}$.

(d) Déduisons de ce qui précède toutes les symétries de la courbe $\mathbf{C}$.
Les questions ont montré que la courbe admet pour axes de symétries les droites $x = 0$ et $x = \pi$ et est invariante par translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $k \in \mathbf{Z}$.

2. (a) Faisons une étude conjointe des fonctions x et y sur $[0, 2\pi]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)
Calculons les dérivées des fonctions x et y (sommme de fonctions usuelles). Pour $\alpha \in [0, 2\pi]$, on a

$$x'(\alpha) = 1 - \cos(\alpha)$$
$$y'(\alpha) = \sin(\alpha).$$

Ainsi pour $\alpha \in [0, 2\pi]$:

$$y'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \{0, \pi, 2\pi\}$$

et

$$x'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{0, 2\pi\}.$$

Les valeurs et le comportement des fonctions cos et sin, accompagné d'un calcul simple des valeurs de x et y aux points spéciaux permettent de dresser le tableau de variation.

La fonction x admet donc un minimum 0 en $\alpha = 0$ et un maximum en $\alpha = 2\pi$ tandis que la fonction y admet un minimum 0 pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 2\pi$ et un maximum valant 2 pour $\alpha = \pi$.

(b) Déterminons la limite $\lim_{\alpha \to 0^+} \dfrac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$.
On admettra qu'il en résulte que $\mathbf{C}$ admet une tangente verticale en $\mathbf{M}(0)$.

On cherche un équivalent de $\dfrac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$:

$$\frac{y(\alpha)}{x(\alpha)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\alpha - \sin(\alpha)} = \frac{1 - \left(1 - \dfrac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^3)\right)}{\alpha - \left(\alpha - \dfrac{\alpha^3}{6} + o(\alpha^3)\right)} \sim_{0^+} \frac{\alpha^2}{2}\frac{6}{\alpha^3} \sim_{0^+} \frac{3}{\alpha}.$$

On en déduit que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{y(\alpha)}{x(\alpha)} = +\infty$$

(c) Une représentation graphique de $\mathbf{C}$ pour $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$ fournit deux arches (de cycloide) qu'on vous laisse tracer.

On suppose maintenant que $\alpha \in]0, \pi[$. On note $\mathbf{M}$ le point $\mathbf{M}(\alpha)$ de $\mathbf{C}$.

3. (a) Donnons les composantes d'un vecteur directeur $\vec{t}$ de la tangente $\mathbf{T}$ à $\mathbf{C}$ en $\mathbf{M}$, et d'un vecteur directeur $\vec{n}$ de la normale $\mathbf{N}$ à $\mathbf{C}$ en $\mathbf{M}$.

Soit $\alpha \in]0, \pi[$. D'après la question 2.b, le vecteur $x'(\alpha)y'(\alpha) \neq 00$ et dirige donc la tangente en $\mathbf{M}$; on peut prendre

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} x'(\alpha) \\ y'(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ 1 - \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

est dont normal à $\vec{t}$ et dirige la normal à $\mathbf{C}$ en $\mathbf{M}$.

(b) Donnons une équation de la droite $\mathbf{N}$ normale à $\mathbf{C}$ en $\mathbf{M}$. Déterminer les coordonnées du point $\mathbf{U}$, intersection de $\mathbf{N}$ avec l'axe $(\mathbf{O}x)$.

Le vecteur $\vec{t}$ est normal à $\mathbf{N}$ et donc pour $P(x, y)$ sur $\mathbf{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \vec{t}.\vec{MP} \\
&= (1 - \cos(\alpha))(x - \alpha + \sin(\alpha)) + \sin(\alpha)(y - 1 + \cos(\alpha)) \\
&= x(1 - \cos(\alpha)) - \alpha(1 - \cos(\alpha)) + \sin(\alpha)(1 - \cos(\alpha)) + \sin(\alpha)y + \sin(\alpha)(-1 + \cos(\alpha)) \\
&= x(1 - \cos(\alpha)) + \sin(\alpha)y - \alpha(1 - \cos(\alpha))
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation de la normal à la courbe $\mathbf{C}$ au point de paramètre α est :

$$\mathbf{N} : \qquad x(1 - \cos(\alpha)) + \sin(\alpha)y - \alpha(1 - \cos(\alpha)) = 0.$$

Le point d'intersection de $\mathbf{N}$ avec l'axe des abscisses est donné pour le point d'ordonnée $y = 0$ satisfaisant

$$x(1 - \cos(\alpha)) - \alpha(1 - \cos(\alpha)) = 0$$

c'est à dire, comme $1 - \cos(\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \in]0, 2\pi[$, par

$$x = \alpha.$$

Le point $\mathbf{U}$ cherché a pour coordonnées $\mathbf{U}(\alpha, 0)$.

(c) Donnons une équation de la droite $\mathbf{T}$ tangente à $\mathbf{C}$ en $\mathbf{M}$. Déterminer les coordonnées du point $\mathbf{V}$, intersection de $\mathbf{T}$ avec la droite d'équation $y = 2$.

Le vecteur $\vec{n}$ est normal à $\mathbf{T}$ et donc pour $P(x, y)$ sur $\mathbf{T}$ on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \vec{n}.\vec{MP} \\
&= -\sin(\alpha)(x - \alpha + \sin(\alpha)) + (1 - \cos(\alpha))(y - 1 + \cos(\alpha)) \\
&= -x\sin(\alpha) + \alpha\sin(\alpha) - \sin(\alpha)^2 + (1 - \cos(\alpha))y - 1 - \cos(\alpha)^2 + 2\cos(\alpha) \\
&= -x\sin(\alpha) + (1 - \cos(\alpha))y - 2 + 2\cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha)
\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe $\mathbf{C}$ au point de paramètre α est :

$$\mathbf{T} : \qquad -x\sin(\alpha) + (1 - \cos(\alpha))y - 2 + 2\cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha) = 0.$$

Le point d'intersection de $\mathbf{T}$ avec la droite est donné pour le point d'ordonnée $y = 2$ satisfaisant

$$-x\sin(\alpha) + (1-\cos(\alpha))y - 2 + 2\cos(\alpha) + \alpha\sin(\alpha) = -x\sin(\alpha) + \alpha\sin(\alpha) = 0$$

c'est à dire, comme $\sin(\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \in]0, 2\pi[$, par

$$x = \alpha.$$

Le point $\mathbf{V}$ cherché a pour coordonnées $\mathbf{V}(\alpha, 2)$.

(d) Que remarque-t-on sur les abscisses des points $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$?

Les abscisses de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont toutes deux égales à α :

$$\mathbf{U}(\alpha, 0), \qquad \mathbf{V}(\alpha, 2).$$

EXERCICE 04

1. (a) Précisons la parité de f ;

Par définition de la valeur absolue, f est paire sur $] - \pi, \pi[$. Par 2π-périodicité, on a que $f(-\pi) = f(\pi)$. On en déduit que f est paire sur $[-\pi, \pi]$ qui est un intervalle symétrique, centré sur 0. Par 2π-périodicité, f est donc paire sur $\mathbf{R}$.

(b) Déterminons la série de Fourier de la fonction f. On note Sf la somme de la série de Fourier.

On note a_n et b_n les coefficients de Fourier de f qui est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbf{R}$: pour tout entier $n \geqslant 1$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \text{ et } b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

et $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$.

D'après la question précédente, f est paire sur $\mathbf{R}$, donc $b_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Calculons maitenant a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

où la première égalité est du à la parité de f.

Calculons ensuite a_n pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt && \text{car } f \text{ est paire} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)dt \\
&\overset{\text{I.P.P}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt\right) \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt && \text{car } \sin(n\pi) = 0 \\
&= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2}
\end{aligned}$$

Da là, on en déduit que pour tout entier pair $n = 2p$ ($p \geqslant 1$) on a :

$$a_n = a_{2p} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{2p} - 1}{(2p)^2} = 0.$$

Et que pour tout entier impair $n = 2p+1$ ($p \geqslant 0$), on a

$$a_n = a_{2p+1} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{2p+1}-1}{(2p+1)^2} = \frac{-4}{\pi(2p+1)^2}.$$

Ainsi en tenant compte de la nullité des b_n et de la moitié des coefficients a_n, la série de Fourier de f s'écrit pour tout x réel :

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2}.$$

2. (a) Étudions la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbf{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

La fonction valeur absolue est $\mathbf{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$. Donc f est $\mathbf{C}^1$ par morceaux sur $]-\pi,\pi]$. Par 2π-périodicité, f est $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.
Le théorème de Dirichlet assure que la série de Fourier de f converge en chaque point réel x vers la régularisée de f :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2} = \tilde{f}(x)$$

où $\tilde{f}(x) = \dfrac{1}{2}\,(\lim_{t\to x^-} f(t) + \lim_{t\to x^+} f(t))$.
On sait de plus que

$$f(-\pi) = \lim_{x\to-\pi^+} f(x) = \lim_{x\to-\pi^+} -x = \pi = \lim_{x\to\pi^-} x = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi).$$

Ainsi f est continue sur $[-\pi,\pi]$ puis sur $\mathbf{R}$.
On en déduit que la régularisée de f est égale à f elle-même et donc d'après le théorème de Dirichlet que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2} = f(x).$$

(b) En calculant $Sf(0)$, trouvons la somme de la série numérique : $T = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.

On a montré lors de la question précédente que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad Sf(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)x\Big)}{(2p+1)^2} = f(x).$$

En appliquant ce résultat à $x = 0$ on obtient

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad Sf(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos\Big((2p+1)0\Big)}{(2p+1)^2} = f(0) = 0.$$

Et donc, commme $\cos(0) = 1$,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2};$$

c'est-à-dire après multiplication par $\dfrac{\pi}{4}$

$$T = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Montrons qu'il existe deux réels a et b non nuls tels que $S = aS + bT$.
   En décomposant la somme définissant f selon les termes pairs et impairs, on obtient
$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + T. \end{aligned}$$
   On a donc
$$S = \frac{1}{4}S + T$$
4. À l'aide du résultat de la question précédente, on va en déduire la somme de la série numérique S.
   D'après la question précédente, on a :
$$S = \frac{1}{4}S + T$$
   et donc
$$\frac{3}{4}S = T = \frac{\pi^2}{8}.$$
   On en conclut que
$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$
5. Appliquons la relation de Parseval à Sf et trouvons la somme de la série numérique :
$$V = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$
   La fonction f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ car la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $]-\pi, \pi]$
   Avec les notations de la question 1.b. le théorème de Parceval assure que :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$
   Comme $a_0 = \frac{\pi}{2}$ et par nullité des b_n et des a_{2p}, on déduit de $a_{2p+1} = \frac{-4}{\pi(2p+1)^2}$ pour $p \geqslant 0$ que
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}.$$
   Calculons maintenant l'intégrale :
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(t)|^2\,dt && \text{par parité de } f \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$
   On obtient ainsi :
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}.$$

On en déduit que

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

et donc

$$V = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

6. (a) Soit $U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Montrons qu'il existe deux réels c et d non nuls tels que $U = cU + dV$.

   Comme lors de la question 4. on décompose la somme définissant U selon la parité de termes pour obtenir

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16}U + V.$$

   (b) À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique U.

   On a montré à la question précédente que :

$$U = \frac{1}{16}U + V$$

   et donc, en utilisant la question 5., que

$$\frac{15}{16}U = V = \frac{\pi^4}{96}.$$

   On en déduit que

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7. (a) Précisons la parité de g.

   La fonction g est impaire sur $]-\pi, \pi[$ car $x \longmapsto x$ l'est. La fonction g n'est cependant pas impaire sur $\mathbf{R}$ car par 2π-périodicité

$$g(-\pi) = g(\pi) = \pi \neq -\pi = -g(\pi).$$

   (b) Déterminons la série de Fourier de la fonction g. On note Sg la somme de la série de Fourier.

   On note ici $a_n(g)$ et $b_n(g)$ les coefficients de Fourier de g. L'imparité de g sur $]-\pi, \pi[$ suffit a obtenir la nullité des coefficients $a_n(g)$ pour $n \geqslant 0$. En effet :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{0} t\cos(nt)\,dt + \int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,dt\end{aligned}$$

   et par le changement de variable $u = -t$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,dt &= \int_{\pi}^{0} -u\cos(nu)(-1)\,dt[u] + \int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,dt \\ &= -\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,dt + \int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,dt = 0\end{aligned}$$

De là, il suffit de calculer les coefficients $b_n(g)$. En utilisant à nouveau l'imparité de $x \longmapsto x$ sur $]-\pi,\pi[$, on obtient pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
b_n(g) &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0 \pi t\sin(nt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{-\cos(nt)}{n}\,dt\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-(-1)^n\pi}{n} + \left[\frac{-\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-(-1)^n\pi}{n}\right) \\
&= \frac{-2(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

On en déduit la série de Fourier de g :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad Sg(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2(-1)^n\sin(nx)}{n} = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n}.$$

8. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction g sur $\mathbf{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

   La fonction $x \longmapsto x$ étant $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, la fonction g est $\mathbf{C}^1$ sur $]-\pi,\pi[$ et $\mathbf{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi,\pi]$. On en déduit que par 2π-périodicité, la fonction g est $\mathbf{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$.

   Le théorème de Dirichlet assure que la série de Fourier de g converge ponctuellement vers la régularisée de g :

   $$\forall x \in \mathbf{R}, \quad Sg(x) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n} = \tilde{g}(x)$$

   où $\tilde{g}(x) = \dfrac{1}{2}\left(\lim_{t\to x^-} g(t) + \lim_{t\to x^+} g(t)\right)$.

   On notera particulièrement le cas de $x = (2p+1)\pi$ où la fonction g n'étant pas continue, on a $g(x) \neq \tilde{g}(x)$. Par 2π-périodicité et continuité de g sur $]-\pi,\pi[$ se sont les seuls points de discontinuité de g et donc les seuls points où $\tilde{g}$ diffère de g.

   On calcule uniquement la régularisé pour $x = \pi$: Par 2π-périodicité,

   $$\lim_{t\to\pi^+} g(t) = \lim_{t\to-\pi^+} g(t)$$

   et donc

   $$\tilde{g}(\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\pi^-} g(t) + \lim_{t\to\pi^+} g(t)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\pi^-} g(t) + \lim_{t\to-\pi^+} g(t)\right) = \frac{1}{2}(\pi-\pi) = 0$$

9. En calculant $Sg\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, trouvons la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$.

   En $x = \pi 2$ la fonction g est continue car sur $]-\pi,\pi[$, $g(x) = x$.

   De là, en notant comme précédemment $\tilde{g}$ la régularisée de g, on a $\tilde{g}(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. La question précédente assure alors que :

   $$Sg\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(\frac{n\pi}{2})}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

   Pour un entier pair $n = 2p$, on a

   $$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2p\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0.$$

Et pour un entier impair, $n = 2p + 1$ on a

$$(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^{2p+1} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + p\pi\right) = -(-1)^p.$$

On peut ainsi simplifier l'expression de $Sg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et trouver

$$\frac{\pi}{2} = Sg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)}.$$

En divisant par 2, on en déduit que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}$$