

Exercice 1

L'objectif de cet exercice est de résoudre le système différentiel :

$$(SD) \quad \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 2x(t) + y(t) - 4z(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales (CI) $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ et $z(0) = 1$.

$$\text{On pose } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

1. Écrire ce système sous la forme matricielle $X'(t) = AX(t)$ où A est une matrice réelle de taille 3×3 à préciser.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A .
- (b) Montrer que les valeurs propres de A sont -1 , -2 et -3 .

3. Dans cette question, nous déterminons les sous-espaces propres de la matrice A .

- (a) Donner le vecteur propre associé à la valeur propre -1 dont la première composante non nulle est 1.
- (b) Donner le vecteur propre associé à la valeur propre -2 dont la première composante non nulle est 1.
- (c) Donner le vecteur propre associé à la valeur propre -3 dont la première composante non nulle est 1.

4. Dans cette question, nous diagonalisons la matrice A .

- (a) Expliquer pourquoi la matrice A peut s'écrire sous la forme $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale et P une matrice de passage inversible.
On choisira pour D la matrice ayant -1 , -2 , -3 dans cet ordre sur la diagonale.
- (b) Donner l'expression de P tel que 1 soit le premier terme non nul de chaque colonne.

(c) Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. On pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, tel que $U(t) = P^{-1}X(t)$.

- (a) Donner les valeurs de $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$.

- (b) Montrer que $U(t)$ vérifie l'équation différentielle matricielle $U'(t) = DU(t)$.
- (c) Trouver la solution de $U'(t) = DU(t)$ telle que $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$ soient les valeurs trouvées en (a).
- (d) En déduire la solution de (SD) satisfaisant aux conditions initiales (CI).

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Pour x dans \mathbb{R} , calculer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire la parité de f .
3. Donner la fonction dérivée de la fonction h définie par $h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.
4. (a) Calculer la dérivée de la fonction f .
(b) Calculer $f'(0)$.
(c) Calculer $f'(x) - 2xf(x)$. Donner une équation différentielle vérifiée par f .
5. (a) Donner le signe de la fonction f' sur \mathbb{R} .
(b) On admet que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
(c) Donner le tableau de variation de f sur \mathbb{R} .

6. On considère la série entière $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} = x + \frac{4}{6} x^3 + \dots + \frac{2^{2p} p!}{(2p+1)!} x^{2p+1} + \dots$.

On note g sa somme sur l'intervalle de convergence. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

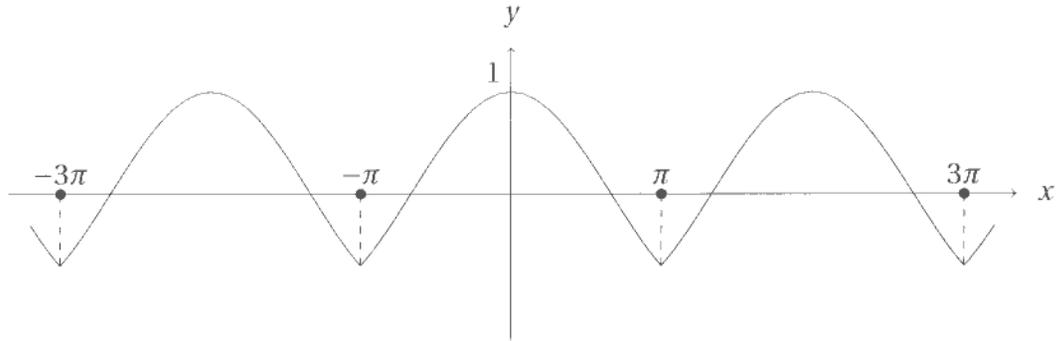
7. Donner le développement en série entière de la dérivée de g .
 8. Montrer que la fonction g vérifie la même équation différentielle que f .
 9. En déduire que $f = g$.
-

Exercice 3

Soit $u \in]0, 1[$ un paramètre. On note $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique telle que :

$$\forall t \in [-\pi, +\pi], \quad f(t) = \cos(ut)$$

1. Étudier la parité de la fonction f .



2. Le graphe ci-dessus représente la fonction f lorsque $u = 3/4$. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3\pi, +3\pi]$ pour la valeur $u = 1/2$.

Dans les questions 3 et 4, u est un réel quelconque de $]0, 1[$.

3. La série de Fourier de f est notée $Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

- (a) Calculer les coefficients de Fourier $a_n(f)$. On rappelle que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

- (b) Que valent les coefficients $b_n(f)$?
 (c) Dédurre des questions précédentes $Sf(t)$.

4. (a) Étudier la convergence de la série de Fourier de f , en énonçant le théorème utilisé.

- (b) Calculer $Sf(\pi)$ puis donner la valeur de l'expression

$$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u \sin(\pi u)}{n^2 - u^2}.$$

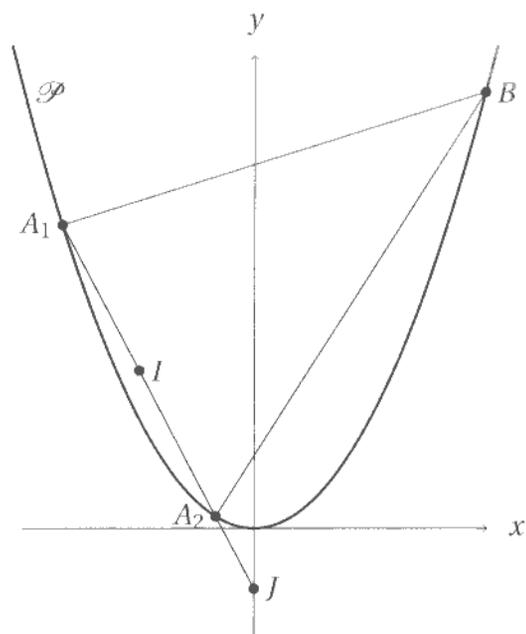
5. Dans cette question, on considère le cas $u = 1/2$.

- (a) Appliquer l'identité de Parseval à f .

- (b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} \right)^2$.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2$, ou encore de représentation paramétrique (t, t^2) pour $t \in \mathbb{R}$.



1. Pour un réel a non nul, soit $A(a, a^2)$ un point de la parabole \mathcal{P} . Donner les composantes d'un vecteur tangent à \mathcal{P} en a .
2. Donner une équation cartésienne de la droite D normale à la parabole \mathcal{P} en $A(a, a^2)$.
3. La droite D normale à la parabole \mathcal{P} et passant par $A(a, a^2)$ coupe \mathcal{P} en $A(a, a^2)$ et en un deuxième point $B(b, b^2)$. Montrer que $b = -a - \frac{1}{2a}$.

4. On définit la fonction $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -x - \frac{1}{2x}$.
 - (a) Calculer la fonction dérivée de h et donner un tableau de variation de h en précisant les extrema et les limites en $-\infty, 0^-, 0^+$ et $+\infty$. On ne demande pas de représentation graphique de h ni d'étude des asymptotes.
 - (b) En déduire que l'image de \mathbb{R}^* par h est un ensemble E de la forme :
 $E =]-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty[$, avec $\alpha < \beta$.
 - (c) Précisez les valeurs de α et de β .
5. (a) Montrer que pour tout $b \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$, il existe exactement deux réels distincts a_1 et a_2 tels que :

$$b = h(a_1) = h(a_2).$$
 - (b) Donner une équation du second degré de paramètre b et d'inconnue a telle que a_1 et a_2 soient ses solutions.
 - (c) En déduire une expression de a_1 et a_2 en fonction de b .
 - (d) Qu'observe-t-on si $b = \alpha$ ou si $b = \beta$?
6. Ici, $b \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$.
 - (a) Pour $A_1(a_1, a_1^2)$ et $A_2(a_2, a_2^2)$, donner en fonction de b les coordonnées du milieu I du segment $[A_1A_2]$.
 - (b) Montrer que $\vec{u}(1, -b)$ est un vecteur directeur de la droite (A_1A_2) .

- (c) Donner en fonction du paramètre b , l'équation de la droite $\Delta = (A_1 A_2)$, passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}(1, -b)$.
- (d) Montrer que quand $b \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$, les droites Δ passent par un point fixe J , dont on donnera les coordonnées.
- (e) Que remarque-t-on quand $b = \alpha$ ou quand $b = \beta$?
-