TELECOLLE JACQUET Corentin

Enoncé

Exercice 01

Soient (u_n), (v_n) et (v_n) définies par $u_0 = -2, v_0 = 1, w_0 = 5$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{array} \right. .$$

Déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Indications :

On commence par remarquer que si l'on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ alors

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Il reste à calculer le polynôme caractéristique $\chi_A(t)$ (on trouve une valeur propre double qui est 1) puis on cherche P la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres puis si D est la matrice diagonale trouvée, en posant $Y_n = P^{-1}X_n$, on a :

$$X_{n+1} = AX_n \Leftrightarrow PY_{n+1} = PDP^{-1}X_n \Leftrightarrow PY_{n+1} = PDY_n \Leftrightarrow Y_{n+1} = DY_n.$$

On pose alors par exemple $Y_n = \begin{pmatrix} u'_n \\ v'_n \\ w'_n \end{pmatrix}$. On peut calculer d'abord Y_0 en utilisant $X_0 = PY_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ puis on trouve Y_n en fonction de Y_0. Et enfin $X_n = PY_n$.

Exercice 02

Soient Ma et Mb deux machines produisant respectivement 100 et 200 objets. La machine Ma (respectivement Mb) produit 5 (respectivement 6) d'objets défectueux. Étant donné un objet défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par la machine Ma ?

Indications :

Si D est l'événement « l'objet est défectueux » et M_a (resp. M_b) « l'objet est fabriqué par M_a (resp. M_b) », on calculera donc $P_D(M_a)$. On connait déjà $P(M_a)$, $P(M_b)$, $P_{M_a}(D)$ et $P_{M_b}(D)$.

Correction

Exercice 01

Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n))_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{array}\right.$.

Etape 1.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

On a immédiatement, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Etape 2.

Diagonalisons A dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. On notera P sa matrice de passage et D la matrice diagonale associée.

On commence par calculer le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-4 & 3 & 3 \\ -3 & t+2 & 3 \\ -3 & 3 & t+2 \end{vmatrix} = (t+2)(t-1)^2.$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et supposons que $X \in E_1(A)$. Alors :

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 4x - 3y - 3z & = & x \\ 3x - 2y - 3z & = & y \\ 3x - 3y - 2z & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 3x - 3y - 3z & = & 0 \\ 3x - 3y - 3z & = & 0 \\ 3x - 3y - 3z & = & 0 \end{array}\right. .$$

On remarque que le système précédent n'a qu'une équation indépendante : $x - y - z = 0$.

Donc : $x = y + z$. Précisons les vecteurs de $E_1(A)$.

On a : $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \right\}$.

Cela s'écrit : $E_1(A) = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbf{R}^2 \in \mathbf{R} \right\}$.

Soit encore : $E_1(A) = \left\{ y\, X_2 + z\, X_3,\ (y, z) \in \mathbf{R}^2 \right\}$, en posant $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On dit que le sous-espace vectoriel $E_1(A)$ est engendré par la famille composée des vecteurs X_2 et X_3, qui sont libres.

$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\{X_2, X_3\}\right)$.

La famille $\{X_2, X_3\}$ est une base de $E_1(A)$. Et la dimension de $E_1(A)$, qui est le nombre d'éléments de cette base, est 2.

Posons encore $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et supposons que $X \in E_{-2}(A)$. Alors :

$$AX = -2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 4x - 3y - 3z & = & -2x \\ 3x - 2y - 3z & = & -2y \\ 3x - 3y - 2z & = & -2z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} 6x - 3y - 3z & = & 0 \\ 3x - 3z & = & 0 \\ 3x - 3y & = & 0 \end{array}\right. .$$

Il reste $x = y = z$.

Donc $E_{-2}(A) = \{x\, X_1,\, x \in \mathbf{R}\}$, en posant $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Et sa dimension est 1.

Ainsi, pour toute racine λ de $\chi_A(t)$, la dimension de son sous-espace propre associé $\dim E_\lambda(A)$ est exactement son ordre de multiplicité dans la décomposition en facteurs de $\chi_A(t)$.
On peut conclure : A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
Il reste à diagonaliser A, ce qui signifie déterminer une matrice P de passage et la matrice diagonale $P^{-1}AP$, que l'on notera D.
On va construire P de la façon suivante : ses colonnes C_i sont les composantes des vecteurs X_i pour tout $i = 1, 2, 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a la relation : $D = P^{-1}AP$. On remarque que dans D le premier coefficient de la diagonale est -2 car on a commencé par X_1, vecteur de $E_{-2}(A)$ pour écrire P.

Etape 3.
On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $Y_n = P^{-1}X_n$.
Montrons que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$Y_{n+1} = DY_n \text{ puis pour tout } n \in \mathbf{N},\ Y_n = D^n Y_0.$$

Posons donc maintenant $Y_n = P^{-1}X_n$, et donc $X_n = PY_n$. Alors :

$$X_n = A^n X_0 \Leftrightarrow P^{-1}X_n = P^{-1}A^n X_0$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}X_n = P^{-1}A^n P Y_0 \Leftrightarrow Y_n = D^n Y_0.$$

Etape 4.
Déduisons en $X_n = PY_n$ en fonction de n puis les expressions des termes généraux u_n, v_n et w_n en fonction de n.
L'idée est de calculer Y_0 en résolvant le système $PY_0 = X_0$. (L'inversion complète de P n'est pas utile.)
Comme $X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a rapidement : $Y_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Puis, on en déduit Y_n par la formule $Y_n = D^n Y_0$.
On a :

$$Y_n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8(-2)^n \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$X_n = PY_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8(-2)^n \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8(-2)^n - 10 \\ 8(-2)^n - 7 \\ 8(-2)^n - 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 02

Soient Ma et Mb deux machines produisant respectivement 100 et 200 objets. La machine Ma (respectivement Mb) produit 5 (respectivement 6) d'objets défectueux. Étant donné un objet défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par la machine Ma ?

Si D est l'événement « l'objet est défectueux » et M_a (resp. M_b) « l'objet est fabriqué par M_a (resp. M_b) », on calcule donc $P_D(M_a)$. On connait déjà :

$$P(M_a) = \frac{1}{3},\ P(M_b) = \frac{2}{3},\ P_{M_a}(D) = \frac{5}{100} \text{ et } P_{M_b}(D) = \frac{6}{200}.$$

Alors :

$$P_D(M_a) = \frac{P_{M_a}(D)P(M_a)}{P(D)}.$$

Puis :

$$P(D) = P_{M_a}(D)P(M_a) + P_{M_b}(D)P(M_b) = \frac{5}{100} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{200} \times \frac{2}{3} = \frac{110}{60 \times 50} = \frac{11}{150}.$$

Enfin :

$$P_D(M_a) = \frac{\frac{5}{100} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{150}} = \frac{5}{22}.$$