TELECOLLE MAURIES Edouard

Enoncé

Exercice 01

On considère des sacs de billes S_1, S_2, ... tels que S_1 contient 3 billes jaunes et 2 billes vertes. Et tous les autres sacs S_2, $S_3, \ldots$ contiennent 2 billes jaunes et 2 billes vertes.
On tire au hasard une bille de S_1 et on la met dans S_2.
Puis on tire une bille de S_2 et on la met dans S_3, ainsi de suite.
pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $E_n = \ll$ la bille tirée dans S_n est verte $\gg$ et $P(E_n)$ sa probabilité.

1. Déterminer $P(E_1)$, $P_{E_1}(E_2)$, $P_{\overline{E}_1}(E_2)$ et $P(E_2)$.
2. Exprimer $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0.4$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0.2\,u_n + 0.4$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 0.5.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Justifier que (u_n) est convergente et préciser sa limite. Conséquence pour $P(E_n)$ quand n est très grand ?

Indications : 1. Pour $P(E_2)$, on applique la formule des probabilités totales :
$P(E_2) = P_{E_1}(E_2)P(E_1) + P_{\overline{E}_1}(E_2)P(\overline{E}_1)$.
2. On applique encore la même formule : $P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_{n+1})P(E_n) + P_{\overline{E}_n}(E_{n+1})P(\overline{E}_n)$. Si vous lisez la suite de l'énoncé, vous avez un moyen de voir si ce que vous avez trouvé est cohérent.
3-a On sent la récurrence.
3-b $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
3-c Toute suite croissante et majorée est ... Par ailleurs, nul besoin de trouver u_n en fonction de n. Vous savez que si $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l alors $l = f(l)$.

Exercice 02

Démontrer que :

$$A = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X],\, \exists\,(a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\; P = a + (2a-3b)X + cX^2\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2.
En donner une base. A t-on $A = \mathbb{R}_2[X]$?

Indications : Plusieurs façons d'aborder l'exercice. On peut montrer que A est un $Vect$ d'une famille à trouver ou alors montrer que le polynôme nul est dans A, que la somme de deux polynômes de A est dans A et que le produit par α d'un polynôme de$A$ est dans A.
Pour l'égalité $A = \mathbb{R}_2[X]$, pensez aux dimensions des deux espaces vectoriels.

Correction

Exercice 01

On considère des sacs de billes S_1, S_2, ... tels que S_1 contient 3 billes jaunes et 2 billes vertes. Et tous les autres sacs S_2, S_3, ... contiennent 2 billes jaunes et 2 billes vertes.
On tire au hasard une bille de S_1 et on la met dans S_2.
Puis on tire une bille de S_2 et on la met dans S_3, ainsi de suite.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $E_n =$ « la bille tirée dans S_n est verte » et $P(E_n)$ sa probabilité.

1. $P(E_1) = \dfrac{2}{5}$ puis $P_{E_1}(E_2) = \dfrac{3}{5}$ puis $P_{\overline{E}_1}(E_2) = \dfrac{2}{5}$ et avec la formule des probabilités totales,

$$P(E_2) = P_{E_1}(E_2)P(E_1) + P_{\overline{E}_1}(E_2)P(\overline{E}_1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5},$$

ce qui donne :

$$P(E_2) = \frac{12}{25} = 0.48$$

2. Exprimons $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$ à l'aide de la formule des probabilités totales :

$$P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_{n+1})P(E_n) + P_{\overline{E}_n}(E_{n+1})P(\overline{E}_n).$$

On a :

$$P_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{3}{5} \text{ et } P_{\overline{E}_n}(E_{n+1}) = \frac{2}{5}.$$

Puis : $P(\overline{E}_n) = 1 - P(E_n)$. On a alors :

$$P(E_{n+1}) = \frac{3}{5} \times P(E_n) + \frac{2}{5}(1 - P(E_n)) = \frac{1}{5}P(E_n) + \frac{2}{5}.$$

3-a Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 0.4$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0.2\,u_n + 0.4$.
On commence par remarquer qu'il y a un rapport avec plus haut. Donc on se sent de suite mieux car on ne s'est pas planté pour l'instant.
Démontrons que la suite (u_n) est majorée par 0.5.
Appelons $\mathcal{P}_n$ cette proposition. Elle est vraie pour $n = 1$ (car $u_1 = 0.4 < 0.5$).
Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour n quelconque. Alors :

$$u_n \leqslant 0.5 \Rightarrow 0.2u_n \leqslant 0.1 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant 0.1 + 0.4 = 0.5.$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

3-b Démontrons que la suite (u_n) est croissante.
On a :

$$u_{n+1} - u_n = 0.2\,u_n + 0.4 - u_n = -0.8u_n + 0.4 \geqslant -0.8 \times 0.5 + 0.4 = 0$$

car $u_n \leqslant 0.5 \Rightarrow -u_n \geqslant -0.5$. Donc on peut conclure : (u_n) est croissante.

3-c. Justifions que (u_n) est convergente.
Il suffit de remarquer que (u_n) est croissante et majorée donc convergente vers une valeur l finie. Puis l vérifie :

$$l = 0.2\,l + 0.4 \Leftrightarrow l = 0.5$$

Donc comme $u_n = P(E_n)$, quand n est très grand, la probabilité que la bille tirée dans S_n soit verte est de $1/2$, ce qui veut dire que les sacs à billes ont tendance à avoir des proportions de billes jaunes et vertes équilibrées.

Exercice 02

Démontrons que :

$$A = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X],\, \exists\, (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,\ P = a + (2a-3b)X + cX^2 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ espace vectoriel des polynômes réels de degré au plus 2.
Méthode 01 : Le polynôme nul est dans A, en prenant $a = b = c = 0$.
Puis si $P \in A$ et $Q \in A$, alors il existe (a,b,c) tel que $P = a + (2a-3b)X + cX^2$ et (d,e,f) tel que $Q = d + (2d-3e)X + fX^2$. Alors :

$$P+Q = a + (2a-3b)X + cX^2 + d + (2d-3e)X + fX^2 = (a+d) + (2(a+d)) - 3(b+e))X + (c+f)X^2.$$

Donc en posant $a' = a+d$, $b' = b+e$, $c' = c+f$, $P+Q = a' + (2a'-3b')X + c'X^2 \in A$.
De même, si $\alpha \in \mathbf{R}$,

$$\alpha P = \alpha(a + (2a-3b)X + cX^2) = \alpha a + (2\alpha a - 3\alpha b)X + \alpha c X^2 \in A.$$

Méthode 02 : on remarque que :

$$a + (2a-3b)X + cX^2 = a(1+2X) + b(-3X) + cX^2.$$

Comme a, b, c sont quelconques,

$$A = \operatorname{Vect}\left((1+2X, -3X, X^2)\right).$$

Comme A est le sous-espace vectoriel engendré par $(1+2X, -3X, X^2)$, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
La famille $\mathcal{B} = (1+2X, -3X, X^2)$ est génératrice. Il reste à montrer qu'elle est libre. On écrit :

$$a(1+2X) + b(-3X) + cX^2 = a + (2a-3b)X + cX^2 = 0 \Rightarrow a = 0,\ 2a-3b = 0,\ c = 0.$$

En effet, un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls. En conclusion,

$$\text{la famille } \mathcal{B} = (1+2X, -3X, X^2) \text{ est une base de } A.$$

Donc $\dim A = 3$. Par ailleurs, $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et comme $A \subset \mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$A = \mathbb{R}_2[X].$$