TELECOLLE BOUSSAC
Enoncé

Exercice 01

On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$. On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. On désire ici encadrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
   (b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Justifier alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
   (c) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
   (d) En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. On étudie ici la fonction f.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant x$.
   (c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0,1]$.
   (d) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
3. On étudie ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$.
   (b) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Indications : 1-d La recherche d'un intervalle stable pour une suite, c'est-à-dire si $u_0 \in I$ alors $u_n \in I$ pour tout n, est fondamental pour l'étude de la convergence.
2-b On pourrait poser $g(x) = f(x) - x$ et étudier son signe en dérivant mais il y a plus simple.
2-d On pourra raisonner par équivalences en élevant au carré $|f'(x)|$.
3-a On utilise le résultat de la question **2) d)** et l'attendue inégalité des accroissements finis :
$|f(u_n) - f(1)| \leqslant \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|\,|u_n - 1|$,
puis on fera une récurrence descendante.
3-b Cette inégalité permet d'avoir deux informations à la fois : la valeur de la limite et la vitesse de convergence.

Exercice 02

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que Φ, défini par : $\Phi(P)(X) = (X^2 + X)P(-1) + (X^2 - X)P(1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Indications : 1. Ici, on montre que Φ est linéaire puis que c'est un endomorphisme.
Il ne faut pas oublier de préciser que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ, après avoir montré la linéarité.
2. Ici, on demande la matrice de Φ dans la base $(1, X, ..., X^n)$.
On rappelle qu'il faut calculer les images $\Phi(X^k)$ pour tout k entier de 0 à n en fonction de 1, X, ... , X^n.
Puis, on construit la matrice de Φ, colonne par colonne. On pourra distinguer le cas pair et le cas impair.
3. On veut déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$, c'est-à-dire ici trouver une base de chacun d'eux (et donc leur dimension).Ne pas se lancer directement dans la résolution d'un système. Aller au plus simple. Par exemple, pour trouver les polynômes P tels que $\Phi(P)(X) = 0$, on rappelle qu'un polynôme est nul si et seulement ses coefficients sont nuls. On peut aussi utiliser le théorème du rang pour guider un peu les recherches pour l'image. Bref, essayez d'éviter des calculs où vous risquez de vous perdre.

Correction

Exercice 01

Exercice 02