TELECOLLE AMICHE
Enoncé

Exercice 01

1. Montrer que $f(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$ possède un minimum et un maximum sur $A = [-1,1]^2$.
2. Montrer que f possède un point critique sur $B =]-1,1[^2$.
3. $(0,0)$ est-il un extremum de f ? (On pourra calculer $f(x,x^3)$.)
4. Trouver le minimum et le maximum de f sur A.

Indications :
1. Il faut juste citer un théorème.
2. On passera par les dérivées partielles premières.
3. On étudiera les variations de $g(x) = f(x,x^3)$ dans un voisinage de 0.
4. On commencera par justifier que les extremums sont forcément aux frontières du carré. On posera d'abord $x = -1$ puis on étudiera $h(y) = f(-1,y)$ et on regardera pour quelles valeurs de y, on a un minimum ou maximum. Puis, on raisonnera pour $x = 1$, puis pour $y = -1$, puis pour $y = 1$.

Exercice 02

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -a \\ a & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$, où a est fixé dans $\mathbb{R}$.
   $M(a)$ est elle diagonalisable dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$?
2. On suppose $a = -2$. Déterminer une base de vecteurs propres.
   Comment calculer
   $$(M(-2))^n \,?$$

Indications :
1. On trouvera le résultat en fonction de la racine carrée d'un polynôme du second degré en a.
2. Sehr Klassich.

Correction

Exercice 01

Exercice 02