TELECOLLE LEZONGAR
Enoncé

Exercice 01

On considère $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer.
2. Déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ et déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in i\,\mathbb{R}$.
3. Trouver une relation entre les modules de $f(z) - 1$ et de $z + 2$, puis trouver une relation entre les arguments de ces deux expressions.
4. On note C l'ensemble des points du plan situés à une distance au plus de $R > 0$ de A d'affixe -2. Déterminer l'image de C par f.

Indications :
1 Pour commencer, on doit montrer que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer, ce qui fait *a priori* deux choses. Mais, on peut tout traiter ensemble.
On pose $z' = f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, où z est un complexe différent de -2. Puis, on écrit z en fonction de z', et on exclut les éventuelles valeurs z' qui posent problème pour faire cela.
2. On cherche tous les z tels que $f(z)$ soit réel et de même tous les z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. On peut interpréter géométriquement ces ensembles.
On rappelle que Z est réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$ et que Z est imaginaire pur si et seulement si $Z = -\bar{Z}$.
3. Il est temps de revoir les règles quand on cherche le module ou un argument d'un rapport de deux complexes.
4. On cherche l'image par f de $C = \{z \in \mathbb{C},\ |z+2| \leqslant R\}$.

Exercice 02

Soit f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x}}{x(1+x)} & \text{si} \quad x \in I \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad x(x+1)y'(x) + (1 + 3x + x^2)y(x) = 1$.

1. On étudie ici la fonction f.
   (a) Montrer que la fonction f est continue et dérivable en 0.
   (b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
   (c) Montrer que f est strictement monotone sur I.
   Indication : on posera $\phi(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) - (1 + 2x)$ pour tout $x > -1$ et on étudiera les variations de ϕ.
2. Résoudre (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.
   Indication : on pourra décomposer $\dfrac{1 + 3x + x^2}{x(x+1)}$ sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta}{x} + \dfrac{\gamma}{x+1}$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
   Que peut-on dire de f ?

Indications :
1. Ici, comme annoncé, on commence par l'étude de f, c'est-à-dire ici essentiellement ses variations. On va s'appuyer, comme nous allons le voir, sur des manipulations de développements limités usuels. Mais à faire soigneusement. Avant de pouvoir dériver f, il faut justifier la dérivabilité de f. On pourra utiliser un théorème classique du cours sur le raccordement de classe $\mathcal{C}^1$ en un point. Enfin, pour étudier la monotonie de f, on utilise bien entendu le signe de la dérivée de f. Pour cela, on remarque que f' s'exprime en fonction de ϕ, proposéée dans l'indication.

Correction

Exercice 01

Exercice 02