TELECOLLE SAVANE

Enoncé

Exercice 01

On donne une suite (X_n) de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On pourra poser $q = 1-p$.

1. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. On note A_n l'événement : « S_n est paire » et $U_n = P(A_n)$.
   Calculer U_1, U_2 et U_3.
3. Montrer que $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1-p$ puis que $U_{n+1} = (1-2p)U_n + p$.
4. Trouver une relation de récurrence vérifié e par $V_n = U_n - \frac{1}{2}$ et donner la limite de (U_n).

Indications :
1. C'est du cours.
2. $U_1 = P(X_1$ est paire $)$, U_2 est $P(X_1 + X_2$ est paire $)$ et se décompose en $P(X_1 = 0, X_2 = 0)$ et $P(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Pour U_3, on a la somme de quatre probabilités.
3. Après le calcul de $P_{A_n}(A_{n+1})$, on calculera de même $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$ puis pour calculer u_{n+1}, on appliquera la formule des probabilités totales.
4. On verra que (V_n) est une suite géométrique de raison $1-2p$.

Exercice 02

Expliciter la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On posera : $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. par l'équation caractéristique ;
2. par une méthode matricielle, en introduisant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Indications :
1. On rappelle que si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, l'équation caractéristique est : $t^2 = at + b$ et on détermine les racines q_1 et q_2 de cette équation.
2. On trouvera une forme matricielle $U_{n+1} = AU_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2 et on diagonalisera A. En particulier, on remarquera que $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à α et que $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à β.

Correction

Exercice 01

Exercice 02