TELECOLLE BOUSSAC
Enoncé

Exercice 01

On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}$. On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. On désire ici encadrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
   (b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Justifier alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.
   (c) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
   (d) En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. On étudie ici la fonction f.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant x$.
   (c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0,1]$.
   (d) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
3. On étudie ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$.
   (b) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Indications : 1-d La recherche d'un intervalle stable pour une suite, c'est-à-dire si $u_0 \in I$ alors $u_n \in I$ pour tout n, est fondamental pour l'étude de la convergence.
2-b On pourrait poser $g(x) = f(x) - x$ et étudier son signe en dérivant mais il y a plus simple.
2-d On pourra raisonner par équivalences en élevant au carré $|f'(x)|$.
3-a On utilise le résultat de la question **2) d)** et l'attendue inégalité des accroissements finis.
3-b Cette inégalité permet d'avoir deux informations à la fois : la valeur de la limite et la vitesse de convergence.

Exercice 02

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que Φ, défini par : $\Phi(P)(X) = (X^2 + X)P(-1) + (X^2 - X)P(1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Indications : 1. Ici, on montre que Φ est linéaire puis que c'est un endomorphisme.
Il ne faut pas oublier de préciser que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ, après avoir montré la linéarité.
2. Ici, on demande la matrice de Φ dans la base $(1, X, ..., X^n)$.
On rappelle qu'il faut calculer les images $\Phi(X^k)$ pour tout k entier de 0 à n en fonction de 1, X, ... , X^n.
Puis, on construit la matrice de Φ, colonne par colonne. On pourra distinguer le cas pair et le cas impair.
3. On veut déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$, c'est-à-dire ici trouver une base de chacun d'eux (et donc leur dimension).Ne pas se lancer directement dans la résolution d'un système. Aller au plus simple. Par exemple, pour trouver les polynômes P tels que $\Phi(P)(X) = 0$, on rappelle qu'un polynôme est nul si et seulement ses coefficients sont nuls. On peut aussi utiliser le théorème du rang pour guider un peu les recherches pour l'image. Bref, essayez d'éviter des calculs où vous risquez de vous perdre.

Correction

Exercice 01

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x$. Et donc, on a bien :

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}.$$

b) On introduit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$. En utilisant la question précedente, on remarque que $x^2 - x + 1$ est supérieur ou égal à $3/4$. Donc,

$$f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.$$

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

Comme le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, $u_1 = f(u_0)$ existe. Supposons que u_n existe pour n donné. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. On peut conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.

c) Si $x \in [0,1]$, alors $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ et donc $x^2 - x + 1 \in [0,1]$.
On peut conclure.

d) Comme $u_0 \in]0,1[$, $u_0 \in [0,1]$.
Puis en utilisant la question précédente, $u_1 = f(u_0) \in [0,1]$. Supposons $u_n \in [0,1]$.
Alors : $f(u_n) = u_{n+1} \in [0,1]$, d'après encore la question précédente.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1].$$

2) a) On étudie ici la fonction f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = \sqrt{v(x)}$, où v est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est à valeurs strictement positives (et en particulier ne s'annule pas) et $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

b) Pour tout $x \in [0,1]$, écrivons les équivalences (les membres étant positifs) :

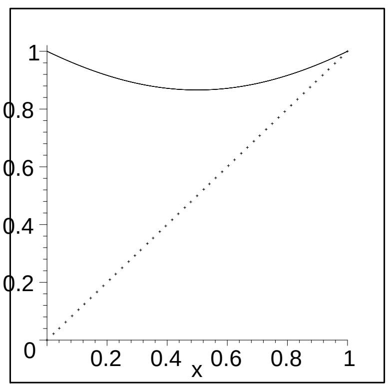
$$f(x) \geqslant x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \geqslant x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geqslant x^2 \Leftrightarrow 1 \geqslant x.$$

Comme $1 \geqslant x$ est une proposition vraie, il en est de même de $f(x) \geqslant x$.

$$\text{Pour tout } x \in [0,1],\ f(x) \geqslant x.$$

Remarque
On aurait pu poser $g(x) = f(x) - x$ et étudier le signe de g sur $[0,1]$ en dérivant g, mais cette dérivée est un peu technique.

c) Représentons alors la courbe de f sur $[0,1]$. Comme $2x - 1$ change de signe en $x = 1/2$, une étude rapide du signe de $f'(x)$ permet de dire que f décroît sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et croît sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Puis, $f(0) = f(1) = 1$ et $f(1/2) = \sqrt{3}/2$.
Enfin, $f'(0) = -1/2$ et $f'(1) = 1/2$, donc la courbe représentative de f possède une tangente de pente $-1/2$ en $(0,1)$, une tangente horizontale en $(1/2, \sqrt{3}/2)$ et une tangente de pente $1/2$ en $(1,1)$.



On trace aussi $y=x$ sur $[0,1]$ pour illustrer l'inégalité de la question **2) b)**.

d) Soit $x \in [0,1]$. On a les équivalences :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left|\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{(2x-1)^2}{4(x^2-x+1)} \leqslant \frac{1}{3}.$$

(Car toutes les quantités sont positives.) On en déduit :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3(4x^2-4x+1) \leqslant 4(x^2-x+1) \Leftrightarrow 8x^2-8x-1 \leqslant 0.$$

Étudions le signe de $\phi(x) = 8x^2-8x-1$. On a : $\phi'(x) = 16x-8$, qui s'annule pour $x = 1/2$. Ainsi, ϕ décroît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et croît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ avec $\phi(0) = -1$, $\phi(1/2) < 0$ et $\phi(1) = -1$. ϕ est à valeurs négatives sur $[0,1]$ et on a bien le résultat.

$$\text{Pour tout } x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3) a) <u>*Remarque*</u>

On commence par remarquer que $f(1) = 1$ et $x = 1$ est la seule valeur qui vérifie $f(x) = x$ sur $[0,1]$. Or, on sait que si $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$ existe dans $\mathbb{R}$, comme f est continue, on a $f(l) = l$. Ainsi 1 sr la seule limite possible.

D'où l'intérêt de s'intéresser à $|1-u_n|$ dans la suite de l'exercice.

Reprenons le fil du sujet.

Rappelons le corollaire de l'inégalité des accroissements finis, si f est une fonction dérivable sur un intervalle I non trivial (ici $I = [a,b]$) et s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leqslant k$, (ici on peut prendre $k = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$), alors :

$$|f(b)-f(a)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)||b-a|.$$

On applique avec $b = 1$ et $a = u_n$. On a alors $f(1) = 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.

Puis : $\sup_{t\in[u_n,1]} |f'(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) On applique l'inégalité précédente pour $n = 1$ et $n = 2$:

$$|1-u_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|1-u_0| \text{ et } |1-u_2| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|1-u_1|.$$

Ce qui implique : $|1-u_2| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 |1-u_0|$.

Considérons donc la proposition $\mathcal{P}_n$: $|1-u_n| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|$.

Les propositions $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.

Supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie pour n entier naturel non nul. Alors, en appliquant aussi l'inégalité de la question **3) a)** pour l'entier n,

$$|1-u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}|1-u_{n-1}| \text{ et } |1-u_{n-1}| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} |1-u_0|.$$

Ce qui implique bien la proposition $\mathcal{P}_n$:

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |1-u_n| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|.$$

Le résultat est montré par récurrence.

c) On peut en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 02

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrons que Φ, défini par :

$$\Phi(P)(X) = (X^2 + X)P(-1) + (X^2 - X)P(1)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrons la linéarité de Φ : soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, et $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\Phi(P + aQ) = (X^2 + X)(P + aQ)(-1) + (X^2 - X)(P + aQ)(1),$$

c'est-à-dire :

$$\Phi(P + aQ) = (X^2 + X)(P(-1) + aQ(-1)) + (X^2 - X)(P(1) + aQ(1)),$$

et en développant :

$$\Phi(P + aQ) = (X^2 + X)P(-1) + a(X^2 + X)Q(-1) + (X^2 - X)P(1) + a(X^2 - X)Q(1).$$

Ceci donne bien : $\Phi(P + aQ) = \Phi(P) + a\Phi(Q)$.
Il reste à remarquer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré au plus 2 et comme $n \geqslant 2$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On peut conclure :

$$\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].$$

2) Écrivons la matrice $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ de Φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour cela, on calcule $\Phi(X^k)$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$. On a déjà :

$$\Phi(1) = 2X^2,\ \Phi(X) = -2X,\ \Phi(X^2) = 2X^2.$$

Puis, on remarque, de façon générale, que si k est pair, la valeur de X^k pour $X = 1$ est 1 et pour $X = -1$ est aussi 1.
Donc, si k est pair : $\Phi(X^k) = (X^2 + X)(-1)^k + (X^2 - X)1^k = 2X^2$.
Puis, si k est impair, la valeur de X^k pour $X = 1$ est 1 et pour $X = -1$ est -1.
Donc, si k est impair : $\Phi(X^k) = (X^2 + X)(-1)^k + (X^2 - X)1^k = -2X$.
Il reste deux formes de matrice $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$, selon que n est pair ou que n est impair.

$$\text{Si } n \text{ est pair, } M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } n \text{ est impair, } M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) *Déterminons le noyau de Φ :* $\operatorname{Ker} \Phi$
$P \in \operatorname{Ker} \Phi$ si et seulement si $\Phi(P)(X) = 0$. Or :

$$\Phi(P)(X) = 0 \Leftrightarrow (P(-1) - P(1))X + (P(-1) + P(1))X^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P(-1)-P(1) & = & 0 \\ P(-1)+P(1) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P(-1) & = & P(1) \\ P(-1) & = & -P(1) \end{array} \right. .$$

Le dernier système est équivalent à écrire que $P(-1)=P(1)=0$, donc que -1 et 1 sont des racines de P. Ce qui signifie que P est divisible par $(X-1)(X+1)=X^2-1$. Il reste :

$$\operatorname{Ker}\Phi = \left\{(X^2-1)Q,\ \text{ où } Q\in\mathbb{R}_{n-2}[X]\right\} = \operatorname{Vect}\left((X^2-1)X^k,\ k\in[\![0,n-2]\!]\right).$$

<u>*Déterminons l'image de* Φ *:* $\operatorname{Im}\Phi$</u>

Comme $\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Vect}\left((X^2-1)X^k,\ k\in[\![0,n-2]\!]\right)$ et comme la famille

$$\left((X^2-1)X^k,\ k\in[\![0,n-2]\!]\right)$$

est libre car constituée de polynômes non nuls tous de degrés différents, elle est une base du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\Phi$.
Ainsi : $\dim\operatorname{Ker}\Phi = n-1$.
Il reste à appliquer le théorème du rang. On a :

$$\dim\mathbb{R}_n[X] = \dim\operatorname{Ker}\Phi + \dim\operatorname{Im}\Phi \Rightarrow \dim\operatorname{Im}\Phi = n+1-(n-1) = 2.$$

Comme pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P)\in\operatorname{Vect}(X,X^2)$ et comme $\operatorname{Vect}(X,X^2)$ a pour base (X,X^2), $\dim\operatorname{Vect}(X,X^2)=2$. On écrit :

$$\operatorname{Im}\Phi\subset\operatorname{Vect}(X,X^2) \text{ et } \dim\operatorname{Im}\Phi = \dim\operatorname{Vect}(X,X^2) = 2,$$

et finalement :

$$\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Vect}(X,X^2).$$