TELECOLLE AMICHE

Enoncé

Exercice 01

1. Montrer que $f(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$ possède un minimum et un maximum sur $A = [-1,1]^2$.
2. Montrer que f possède un point critique sur $B =]-1,1[^2$.
3. $(0,0)$ est-il un extremum de f ? (On pourra calculer $f(x,x^3)$.)
4. Trouver le minimum et le maximum de f sur A.

Indications :
1. Il faut juste citer un théorème.
2. On passera par les dérivées partielles premières.
3. On étudiera les variations de $g(x) = f(x,x^3)$ dans un voisinage de 0.
4. On commencera par justifier que les extremums sont forcément aux frontières du carré. On posera d'abord $x = -1$ puis on étudiera $h(y) = f(-1,y)$ et on regardera pour quelles valeurs de y, on a un minimum ou maximum. Puis, on raisonnera pour $x = 1$, puis pour $y = -1$, puis pour $y = 1$.

Exercice 02

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -a \\ a & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$, où a est fixé dans $\mathbb{R}$.
   $M(a)$ est elle diagonalisable dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$?
2. On suppose $a = -2$. Déterminer une base de vecteurs propres.
   Comment calculer
   $$(M(-2))^n \,?$$

Indications :
1. On trouvera le résultat en fonction de la racine carrée d'un polynôme du second degré en a.
2. Sehr Klassich.

Correction

Exercice 01

1. Montrons que $f(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$ possède un minimum et un maximum sur $A = [-1,1]^2$.
Comme f est une fonction continue (car somme de produits de fonctions continues sur $[-1,1]^2$) sur $[-1,1]^2$. De plus $[-1,1]^2$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ donc f possède au moins un minimum et au moins un maximum sur ce fermé-borné.
2. Montrons que f possède un point critique sur $B =]-1,1[^2$.
Pour tout $(x,y) \in]-1,1[^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + \frac{2y}{1+y^2}.$$

On sait que (x,y) est un point critique si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2xy & = & 0 \\ x^2 + \dfrac{2y}{1+y^2} & = & 0 \end{array}\right. .$$

Alors :

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ et } y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Le point $(0,0)$ est le seul point critique sur $]-1,1[^2$.
Attention, un extremum sur I est un point critique sur I ne fonctionne que si I est une partie ouverte. C'est le cas pour $]-1,1[^2$. On n'a pas la réciproque. C'est l'objet de la question suivante.
3. $(0,0)$ est-il un extremum de f ? (On pourra calculer $f(x,x^3)$.)
On va étudier les variations de $g(x) = f(x,x^3)$ dans un voisinage de 0.

$$g(x) = x^5 + \ln(1+x^6).$$

Puis $g'(x) = 5x^4 + \dfrac{6x^5}{1+x^6}$. Et :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 5 + \frac{6x}{1+x^6} = 0.$$

Or $5 + \dfrac{6x}{1+x^6} = 0$ entraîne que x est strictement négatif. Par ailleurs, dans un voisinage de 0,

$$g'(x) = 5x^4 + 6x^5 + o(x^5).$$

Donc $g'(x) > 0$ dans un voisinage de 0, privé de 0. Même si $g'(x)$ s'annule en $x = 0$, g est strictement croissante autour de 0 et $x \mapsto f(x,x^3)$ est strictement croissante autour de 0 et donc $f(x,x^3) < 0$ pour $x \in]-\epsilon, 0[$ et $f(x,x^3) > 0$ pour $x \in]0,\epsilon[$, où ϵ est un certain réel strictement positif. Donc f n'a pas d'extremum en $(0,0)$.
4. Trouvons le minimum et le maximum de f sur A.
On commence par justifier que les extremums sont forcément aux frontières du carré. En effet, il n'y a pas d'extremum sur $]-1,1[^2$ donc ils se trouvent sur la frontière qui est sur les droites $x = 1$ ou $y = -1$ ou $x = -1$ ou $y = 1$.
• On pose d'abord $x = -1$ puis on étudie $h(y) = f(-1,y)$ et on regarde pour quelles valeurs de y, on a un minimum ou maximum.
On a : $h(y) = y + \ln(1+y^2)$. Puis :

$$h'(y) = 1 + \frac{2y}{1+y^2} = 0 \Leftrightarrow (1+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -1.$$

On fait le tableau de variation de h sur $[-1,1]$. On remarque que $h' > 0$ sur $]-1,1]$ et s'annule pour $y=-1$.
Puis $h(-1) = -1+\ln 2$ et $h(1) = 1+\ln 2$.
• On pose ensuite $x = 1$ puis on étudie $h(y) = f(1,y)$. On trouve encore h strictement croissante.
Puis $h(-1) = -1+\ln 2$ et $h(1) = 1+\ln 2$.
• On pose ensuite $y=-1$ puis on étudie $h(x) = f(x,-1) = -x^2+\ln 2$. La fonction h est croissante sur $[-1,0]$ de $-1+\ln 2$ à $\ln 2$ puis décroissante sur $[0,1]$ de $\ln 2$ à $-1+\ln 2$.
• On pose ensuite $y = 1$ puis on étudie $h(x) = f(x,1) = x^2+\ln 2$. La fonction h est décroissante sur $[-1,0]$ de $1+\ln 2$ à $\ln 2$ puis croissante sur $[0,1]$ de $\ln 2$ à $1+\ln 2$.

• **Bilan** : le maximum est $1+\ln 2$ atteint en $(-1,1)$ et $(1,1)$ et le minimum est $-1+\ln 2$ atteint en $(-1,-1)$ et en $(1,-1)$.

Exercice 02

1. Déterminons le polynôme caractéristique de $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -a \\ a & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$, où a est fixé dans $\mathbb{R}$.

On a :

$$\chi_a(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & -a \\ 1 & t-1 & a \\ -a & a & t-2a+1 \end{vmatrix}.$$

On fait par exemple : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$:

$$\chi_a(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & -a \\ t & t-1 & a \\ 0 & a & t-2a+1 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & t-1 & a \\ 0 & a & t-2a+1 \end{vmatrix}.$$

Puis : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$\chi_a(t) = t \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ 0 & t-2 & 2a \\ 0 & a & t-2a+1 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} t-2 & 2a \\ a & t-2a+1 \end{vmatrix}.$$

On obtient :

$$\chi_a(t) = t\left((t-2)(t-2a+1) - 2a^2\right) = t\left(t^2 - (2a+1)t - 2a^2 + 4a - 2\right).$$

0 fait parti du spectre. Il reste à étudier le trinôme du second degré :

$$t^2 - (2a+1)t - 2a^2 + 4a - 2 = 0.$$

Son discriminant est : $\Delta = (2a+1)^2 - 4(-2a^2+4a-2) = 12a^2 - 12a + 9$.
Le discriminant de ce dernier trinôme est : $144 - 36 \times 12 < 0$. Donc $12a^2 - 12a + 9 > 0$.
Ainsi $\Delta > 0$ et l'équation $t^2 - (2a+1)t - 2a^2 + 4a - 2 = 0$ a deux solutions réelles et distinctes,

$$\frac{2a+1+\sqrt{12a^2-12a+9}}{2} \text{ et } \frac{2a+1-\sqrt{12a^2-12a+9}}{2}.$$

L'une de ces quantités peut-elle valoir 0 ?

$$\frac{2a+1+\sqrt{12a^2-12a+9}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12a^2-12a+9} = -2a-1.$$

Alors $-2a-1 > 0$ et en élevant au carré,

$$12a^2 - 12a + 9 = (-2a-1)^2 = 4a^2 + 1 + 4a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Or $-2a-1 < 0$ pour $a = 1$ donc c'est impossible.

$$\frac{2a+1-\sqrt{12a^2-12a+9}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12a^2-12a+9} = 2a+1.$$

Alors $2a+1>0$ et en élevant au carré,

$$12a^2-12a+9=(-2a-1)^2=4a^2+1+4a \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1.$$

Or $2a+1>0$ pour $a=1$ donc dans ce cas, $\dfrac{2a+1-\sqrt{12a^2-12a+9}}{2}$ et 0 sont confondus.

• Si $a \neq 1$, le spectre de $M(a)$ a trois valeurs distinctes et $M(a)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

• Si $a=1$, 0 est double. $M(1)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\dim E_0(M(1))=2$.

On écrit : $M(1)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda=0$. Posons $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Supposons que $X \in E_0(M(1))$.

Alors : $M(1)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y+z \\ -x+y-z \\ x-y+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cela se traduit par le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ -x+y-z & = & 0 \\ x-y+z & = & 0 \end{array}\right.$ L'équation $x-y+z=0$ est celle d'un plan, donc de dimension 2.

En conclusion, $M(1)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

2. On suppose $a=-2$. Déterminons une base de vecteurs propres. Le spectre est alors :

$$\left\{0,\ \frac{2a+1+\sqrt{12a^2-12a+9}}{2},\ \frac{2a+1-\sqrt{12a^2-12a+9}}{2}\right\},$$

avec $a=2$. C'est donc :

$$\{0,\ 3,\ -6\}.$$

On détermine les trois sous-espaces propres qui sont des droites vectorielles de façon classique :

$E_0(M(-2))=\text{Vect}\left(\{(1,1,0)\}\right)$, $E_3(M(-2))=\text{Vect}\left(\{(-2,2,1)\}\right)$, $E_{-6}(M(-2))=\text{Vect}\left(\{(1,-1,4)\}\right)$.

Après, si l'on veut $(M(-2))^n$, on remarque que $M(-2)=PDP^{-1}$ avec :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } D=Diag\,(0,3,-6).$$

Puis : $(M(-2))^n=PD^nP^{-1}$.