TELECOLLE LEZONGAR
Enoncé

Exercice 01

On considère $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer.
2. Déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ et déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in i\,\mathbb{R}$.
3. Trouver une relation entre les modules de $f(z) - 1$ et de $z + 2$, puis trouver une relation entre les arguments de ces deux expressions.
4. On note C l'ensemble des points du plan situés à une distance au plus de $R > 0$ de A d'affixe -2. Déterminer l'image de C par f.

Indications :
1 Pour commencer, on doit montrer que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer, ce qui fait *a priori* deux choses. Mais, on peut tout traiter ensemble.
On pose $z' = f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, où z est un complexe différent de -2. Puis, on écrit z en fonction de z', et on exclut les éventuelles valeurs z' qui posent problème pour faire cela.
2. On cherche tous les z tels que $f(z)$ soit réel et de même tous les z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. On peut interpréter géométriquement ces ensembles.
On rappelle que Z est réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$ et que Z est imaginaire pur si et seulement si $Z = -\bar{Z}$.
3. Il est temps de revoir les règles quand on cherche le module ou un argument d'un rapport de deux complexes.
4. On cherche l'image par f de $C = \{z \in \mathbb{C},\ |z+2| \leqslant R\}$.

Exercice 02

Soit f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{-x}}{x(1+x)} & \text{si} \quad x \in I \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

On considère l'équation différentielle : $(E)\quad x(x+1)y'(x) + (1 + 3x + x^2)y(x) = 1$.

1. On étudie ici la fonction f.
   (a) Montrer que la fonction f est continue et dérivable en 0.
   (b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
   (c) Montrer que f est strictement monotone sur I.
   Indication : on posera $\phi(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1) - (1 + 2x)$ pour tout $x > -1$ et on étudiera les variations de ϕ.
2. Résoudre (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.
   Indication : on pourra décomposer $\dfrac{1 + 3x + x^2}{x(x+1)}$ sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta}{x} + \dfrac{\gamma}{x+1}$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
   Que peut-on dire de f ?

Indications :
1. Ici, comme annoncé, on commence par l'étude de f, c'est-à-dire ici essentiellement ses variations. On va s'appuyer, comme nous allons le voir, sur des manipulations de développements limités usuels. Mais à faire soigneusement. Avant de pouvoir dériver f, il faut justifier la dérivabilité de f. On pourra utiliser un théorème classique du cours sur le raccordement de classe $\mathcal{C}^1$ en un point. Enfin, pour étudier la monotonie de f, on utilise bien entendu le signe de la dérivée de f. Pour cela, on remarque que f' s'exprime en fonction de ϕ, proposéée dans l'indication.

Correction

Exercice 01

1) On considère donc $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.
Pour montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer, on pose $z' = f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, où z est un complexe différent de -2. Alors :

$$z' = \frac{z}{z+2} \Leftrightarrow z'(z+2) = z \Leftrightarrow z(z'-1) = -2z'.$$

En supposant $z' \neq 1$, on a : $z = \dfrac{2z'}{1-z'}$. Ainsi, f possède une fonction réciproque :

$$f^{-1} : E = \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{-2\},\ z \mapsto \frac{2z}{1-z}.$$

2) • *Détermination de tous les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$*
On suppose $z \neq -2$. On a les équivalences :

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{z+2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}+2} \Leftrightarrow z\bar{z} + 2z = z\bar{z} + 2\bar{z} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

Donc :

$$f(z) \in \mathbb{R} \text{ si et seulement si } z \text{ est réel et différent de } -2.$$

• *Détermination de tous les complexes z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$*
On suppose $z \neq -2$. On a les équivalences :

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{z+2} = -\frac{\bar{z}}{\bar{z}+2} \Leftrightarrow z\bar{z} + 2z = -z\bar{z} - 2\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} = 0.$$

Posons $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$z\bar{z} + z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

On reconnaît une équation du cercle Γ de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1.
Attention, $z \neq -2$ et on remarque que le point A d'affixe -2 appartient au cercle Γ. Il faut donc l'enlever.
Finalement :

$$f(z) \in i\mathbb{R} \text{ si et seulement si } M(z) \in \Gamma \setminus \{A(-2)\}.$$

3) Posons $Z_1 = f(z) - 1$ et $Z_2 = z + 2$, avec $z \neq -2$. On a :

$$Z_1 = \frac{z}{z+2} - 1 = \frac{-2}{z+2}.$$

Puis : $|Z_1| = \left|\dfrac{2}{z+2}\right| = \dfrac{2}{|z+2|}$.
Puis : $\arg Z_1 = \arg\left(\dfrac{-2}{z+2}\right) = \arg(-2) - \arg(z+2) = \pi - \arg(Z_2)$. On peut résumer :

$$|Z_1| = \frac{2}{|Z_2|} \text{ et } \arg Z_1 = \pi - \arg(Z_2).$$

4) Posons $C = \{z \in \mathbb{C},\ |z+2| \leqslant R\} = \{z \in \mathbb{C},\ |Z_2| \leqslant R\}$, avec les notations de la question **3)**.
On en déduit d'après toujours la question **3)**,

$$z \in C \Leftrightarrow |f(z) - 1| = |Z_1| = \frac{2}{|Z_2|} \geqslant \frac{2}{R}.$$

Ainsi, si B est le point d'affixe 1,

$$f(C) \text{ est le complémentaire du disque ouvert de centre } B \text{ et de rayon } \frac{2}{R}.$$

Exercice 02

1) a) On note $I =]-1, +\infty[$ et soit f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x(1+x)} & \text{si} \quad x \in I \setminus \{0\} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

<u>*Continuité de f en 0*</u>

On remarque que l'expression qui fournit $f(x)$ pour x non nul, prend une forme indéterminée quand x tend vers 0. Pour lever cette forme indéterminée, effectuons un développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0. Pour cela, on commence à écrire celui de e^u et celui de $\dfrac{1}{1+u}$, à l'ordre 2 (l'ordre 1 suffirait pour la continuité mais autant s'avancer pour la suite, c'est-à-dire la dérivabilité) quand u tend vers 0 :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2), \; \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2).$$

On a ici pour $x \in I \setminus \{0\}$,

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x(1+x)} = \frac{1}{x} \times \left(1 - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \times \frac{1}{1+x},$$

soit :

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times (1 - x + x^2 + o(x^2)),$$

ce qui donne, en développant et en ne gardant que les termes de degré au plus 2 dans le développement,

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \left(x - \frac{x^2}{2} - x^2 + o(x^2)\right) = 1 - \frac{3}{2}x + o(x).$$

On a : $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = 1 = f(0)$ et on peut conclure :

$$f \text{ est continue en } 0 \text{ avec } f(0) = 1.$$

<u>*Dérivabilité de f en 0*</u>

f est dérivable en 0 si et seulement si la quantité $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ a une limite finie quand x tend vers 0. Dans ce cas, cette valeur finie est $f'(0)$. On utilise le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 trouvé précédemment, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$.

On a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1 - \frac{3}{2}x + o(x) - f(0)}{x-0} = -\dfrac{3}{2} + o(1)$ car $f(0) = 1$.

Il reste : $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{3}{2} = f'(0)$.

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{3}{2}.$$

b) Pour montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on utilise le théorème de prolongement par classe $\mathcal{C}^1$. Il suffit de vérifier d'abord que f est continue sur I : f est continue sur $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ (par stabilité) et en 0, d'après **1) a)**.
Puis il faut vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{0\}$ et que $\lim\limits_{x \mapsto 0} f'(x) = f'(0)$.
On commence par écrire que $x \mapsto 1 - e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $I \setminus \{0\}$ et que $x \mapsto x(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $I \setminus \{0\}$ puis que le rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{0\}$(dont le dénominateur ne s'annule pas sur $I \setminus \{0\}$) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{0\}$.
Il reste à calculer $f'(x)$ pour $x \in I \setminus \{0\}$. On a :

$$\forall x \in I \setminus \{0\}, \, f'(x) = \frac{e^{-x}(x+x^2) - (1-e^{-x})(1+2x)}{(x^2+x)^2} = \frac{e^{-x}(1+3x+x^2) - 1 - 2x}{x^2(x+1)^2}.$$

On remarque que les fonctions $x \mapsto e^{-x}(1+3x+x^2)-1-2x$ et $x \mapsto x^2(x+1)^2$ sont continues sur $I \setminus \{0\}$ et la deuxième fonction ne s'annulant pas sur $I \setminus \{0\}$, leur rapport est continue sur $I \setminus \{0\}$. On retrouve au passage le fait que f' est continue sur $I \setminus \{0\}$. On fait tendre x vers 0, la quantité $f'(x)$ prend une forme indéterminée et un recours à un développement limité (l'ordre 2 est nécessaire à cause du x^2 au dénominateur) est bienvenu. Au voisinage de $x=0$, la quantité $f'(x)$ vaut :

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)(1+3x+x^2)-1-2x}{x^2(x+1)^2}\\
&= \frac{-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2(1+x)^2}.\\
&= \frac{-\frac{3}{2}+o(1)}{(1+x)^2},
\end{aligned}$$

quantité qui tend vers $-3/2$ quand x tend vers 0.
On a bien : $\lim\limits_{x\mapsto 0} f'(x) = f'(0)$. On peut conclure :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I.$$

c) On veut montrer que f est strictement monotone sur I. Pour cela, on pose $\phi(x) = e^{-x}(x^2+3x+1) - (1+2x)$ pour tout $x > -1$ et on étudie les variations de ϕ. La fonction ϕ est dérivable sur I car elle est issue de sommes et de produit de fonctions dérivables sur I. On a :

$$\forall x \in I,\ \phi'(x) = e^{-x}(2x+3) - e^{-x}(x^2+3x+1) - 2 = e^{-x}(-x^2-x+2) - 2.$$

On peut redériver cette fonction, toujours car elle est somme d'une constante et d'un produit de fonctions dérivables sur I.

$$\forall x \in I,\ \phi''(x) = e^{-x}(-2x-1) - e^{-x}(-x^2-x+2) = e^{-x}(x^2-x-3).$$

x^2-x-3 est un polynôme du second degré de racines $(1\pm\sqrt{13})/2$ et on remarque que $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} < -1 < \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Ainsi, la quantité $\phi''(x)$ est négative si $x \in \left]-1, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right[$, et elle est positive si $x \in \left]\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$.

Donc, la fonction ϕ' est décroissante sur $\left]-1, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right[$, et est croissante sur $\left]\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$. On remarque que :

$$\phi'(-1) = 2(e-1),\ \phi'(0) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \phi'(x) = -2.$$

Donc la quantité $\phi'(x)$ est positive si $x \in \left]-1, 0\right]$, et est négative si $x \in \left]0, +\infty\right[$. On en déduit que ϕ est croissante sur $\left]-1, 0\right]$, et est décroissante sur $\left]0, +\infty\right[$. Comme $\phi(0) = 0$, on peut enfin dire que la quantité $\phi(x)$ est négative si $x \in \left]-1, 0\right]$, et est toujours négative si $x \in \left]0, +\infty\right[$.
On peut repasser à la dérivée de la fonction f :

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f'(x) = \frac{\phi(x)}{x^2(x+1)^2}.$$

Le numérateur $\phi(x)$ de $f'(x)$ est négatif.
Puis, son dénominateur $x^2(1+x)^2$ est toujours positif.
On en déduit que la quantité $f'(x)$ est négative sur I (par rapport d'un négatif sur un positif). Donc :

$$f \text{ est décroissante sur } I.$$

2) On considère l'équation différentielle : $(E)\ \ x(x+1)y'(x) + (1+3x+x^2)y(x) = 1$. On veut résoudre (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.

Résolution de l'indication

On propose de décomposer $\dfrac{1+3x+x^2}{x(x+1)}$ sous la forme :

$$\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1}, \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Commençons par supposer cette égalité. On pose :

$$(1)\ F(x) = \frac{1+3x+x^2}{x(x+1)} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1},$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ est un couple à déterminer.
Si un tel triplet existe, multiplions par x de chaque côté de l'égalité précédente (1),

$$xF(x) = \frac{1+3x+x^2}{x+1} = x\alpha + \beta + \frac{\gamma x}{x+1},$$

et en prenant $x = 0$, on obtient : $1 = \beta$.
De même, on multiplie par $x+1$ de chaque côté de l'égalité (1).

$$(x+1)F(x) = \frac{1+3x+x^2}{x} = (x+1)\alpha + \frac{(x+1)\beta}{x} + \gamma,$$

et en prenant $x = -1$, on obtient : $1 = \gamma$.
Il reste à remarquer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et donc $\alpha = 1$ car :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\beta}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\gamma}{x+1} = 0.$$

Ainsi (1) devient :

$$(2)\ \frac{1+3x+x^2}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

On peut vérifier réciproquement que si l'on met maintenant le second membre sous le même dénominateur, (2) est vraie.

Résolution de l'équation homogène associée à (E)

Il reste à résoudre (E) maintenant. Avant d'appliquer la méthode de variation de la constante, on commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$(E_H)\ \ x(x+1)y'(x) + (1+3x+x^2)y(x) = 0.$$

Pour cela, un petit rappel s'impose.
Si (E_H) $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$, où a et b sont continues et a ne s'annule pas sur une partie J de $\mathbb{R}$ alors si G est une primitive de $\dfrac{b}{a}$ sur J, l'ensemble des solutions de (E_H) sur J est constitué des fonctions du type $x \mapsto K \exp(-G(x))$, où K est une constante réelle. Ici $J = I_1$ ou $J = I_2$ et, en utilisant (2) :

$$\forall x \in I,\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1+3x+x^2}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

Vous venez de comprendre où l'indication est utile. Il reste à intégrer sur $I_1 \cup I_2$ et :

$$\forall x \in I,\ G(x) = x + \ln|x| + \ln|x+1| = x + \ln|x(x+1)|.$$

Ainsi sur $I_1 =]-1, 0[$, $G(x) = x + \ln(-x(x+1))$ et l'ensemble des solutions de (E_H) est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$y_H : x \mapsto K \exp(-x - \ln(-x(x+1))) = \frac{K}{-x(x+1)} e^{-x},$$

où K est un réel.
Sur $I_2 =]0, +\infty[$, $G(x) = x + \ln(x(x+1))$ et l'ensemble des solutions de (E_H) est l'ensemble des fonctions $y_H : x \mapsto K \exp(-x - \ln(x(x+1))) = \dfrac{K}{x(x+1)} e^{-x}$, où K est un réel.
On remarque qu'en prenant $-K$ à la place de K, on en déduit que les deux ensembles de solutions correspondent aux mêmes expressions mais sur deux intervalles distincts.

Résolution de l'équation complète (E)

Il reste donc à résoudre l'équation complète. Pour cela, on va appliquer la méthode de variation de la constante.
Supposons $x \in I_1$ et posons $y(x) = \dfrac{K(x)}{x(x+1)} e^{-x}$.
Et déterminons une condition sur K pour que y soit une solution de (E).
Si $y_H(x) = \dfrac{1}{x(x+1)} e^{-x}$, on remarque que y_H vérifie (E_H) et que $y(x) = K(x)y_H(x)$.
Puis, pour tout $x \in I_1$, on a : $y'(x) = K'(x)y_H(x) + K(x)y_H'(x)$.

Avec les notations $a(x) = x(x+1)$ et $b(x) = 1 + 3x + x^2$, $a(x)y'(x) + b(x)y(x)$ s'écrit :

$$a(x)\left(K'(x)y_H(x) + K(x)y'_H(x)\right) + b(x)K(x)y_H(x).$$

Comme $a(x)y'_H(x) + b(x)y_H(x) = 0$, on a :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = a(x)K'(x)y_H(x) = 1.$$

Il reste pour tout $x \in I_1$: $K'(x) = \dfrac{1}{a(x)y_H(x)} = \dfrac{1}{e^{-x}} = e^x$.
On intègre et : $K(x) = e^x + L$, où L est une constante d'intégration. Comme nous recherchons une solution particulière y_p, prenons $L = 0$. Il reste :

$$y_p(x) = \frac{K(x)}{x(x+1)}e^{-x} = \frac{e^x}{x(x+1)}e^{-x} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Il reste à ajouter y_p à une solution quelconque y_H de l'équation homogène associée et l'on a toutes les solutions de (E) sur I_1 et sur I_2. On peut écrire :

$$y_1 :]-1, 0[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x(x+1)} + \frac{K_1}{x(x+1)}e^{-x}, \text{ où } K_1 \in \mathbb{R}.$$

On peut faire un raisonnement identique si $x \in I_2$:

$$y_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x(x+1)} + \frac{K_2}{x(x+1)}e^{-x}, \text{ où } K_2 \in \mathbb{R}.$$