TELECOLLE SAVANE

Enoncé

Exercice 01

On donne une suite (X_n) de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On pourra poser $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. On note A_n l'événement : « S_n est paire » et $U_n = P(A_n)$.
   Calculer U_1, U_2 et U_3.
3. Montrer que $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - p$ puis que $U_{n+1} = (1-2p)U_n + p$.
4. Trouver une relation de récurrence vérifié e par $V_n = U_n - \frac{1}{2}$ et donner la limite de (U_n).

Indications :
1. C'est du cours.
2. $U_1 = P(X_1$ est paire $)$, U_2 est $P(X_1 + X_2$ est paire $)$ et se décompose en $P(X_1 = 0, X_2 = 0)$ et $P(X_1 = 1, X_2 = 1)$. Pour U_3, on a la somme de quatre probabilités.
3. Après le calcul de $P_{A_n}(A_{n+1})$, on calculera de même $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$ puis pour calculer u_{n+1}, on appliquera la formule des probabilités totales.
4. On verra que (V_n) est une suite géométrique de raison $1 - 2p$.

Exercice 02

Expliciter la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On posera : $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. par l'équation caractéristique ;
2. par une méthode matricielle, en introduisant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Indications :
1. On rappelle que si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, l'équation caractéristique est : $t^2 = at + b$ et on détermine les racines q_1 et q_2 de cette équation.
2. On trouvera une forme matricielle $U_{n+1} = AU_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2 et on diagonalisera A. En particulier, on remarquera que $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à α et que $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à β.

Correction

Exercice 01

On donne une suite (X_n) de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On pourra poser $q = 1-p$.

1. Déterminons la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

D'après le cours, comme les v.a.r X_i sont indépendants et suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p. On écrit :

$$S_n \hookleftarrow \mathcal{B}(n,p).$$

2. On note A_n l'événement : « S_n est paire » et $U_n = P(A_n)$.
Calculons U_1, U_2 et U_3.

- On écrit :

$$U_1 = P(X_1 \text{ est paire }) = P(X_1 = 0) = q.$$

- U_2 est $P(X_1 + X_2$ est paire $)$ et se décompose en (car X_1 et X_2 indépendants) :

$$P(U_2) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = q^2 + p^2.$$

- Pour U_3, on a la somme de quatre probabilités. En effet, $[X_1 + X_2 + X_3$ est paire $]$ signifie :

$$(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) \cup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0).$$

Finalement :

$$P(U_3) = q^3 + qp^2 + qp^2 + qp^2 = q^3 + 3qp^2.$$

3. • Montrons que $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1-p$.
On remarque que $P_{A_n}(A_{n+1})$ est la probabilité que X_{n+1} soit paire.
En effet, c'est la probabilité que $S_n + X_{n+1}$ est paire sachant que S_n l'est. Donc X_{n+1} est paire. Alors :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = q = 1-p.$$

- Montrons que $U_{n+1} = (1-2p)U_n + p$.

On commence par calculer de même $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$. C'est la probabilité que $S_n + X_{n+1}$ est paire sachant que S_n est impaire. Donc X_{n+1} est impaire. Alors :

$$P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = p.$$

Pour calculer u_{n+1}, on applique la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n}).$$

Cela donne :

$$u_{n+1} = P_{A_n}(A_{n+1})u_n + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})(1-u_n).$$

Et donc :

$$u_{n+1} = qu_n + p(1-u_n) = (1-2p)u_n + p.$$

4. Trouvons une relation de récurrence vérifiée par $V_n = U_n - \frac{1}{2}$ et donnons la limite de (U_n).
On a :

$$u_{n+1} = (1-2p)u_n + p \Rightarrow \frac{1}{2} + V_{n+1} = (1-2p)\left(\frac{1}{2} + V_n\right) + p.$$

Cela donne :

$$V_{n+1} = (1-2p)V_n.$$

On voit que (V_n) est une suite géométrique de raison $1-2p$.
Cela donne :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ V_n = (1-2p)^{n-1}V_1.$$

Puis $V_1 = U_1 - \dfrac{1}{2} = q - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - p$. Il reste :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ V_n = (1-2p)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - p\right).$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ U_n = \frac{1}{2} + (1-2p)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - p\right).$$

Si n tend vers $+\infty$, comme $-1 < 1-2p < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-2p)^{n-1} = 0$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 02

Nous allons déterminer l'expression de u_n en fonction de n si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie :

$$(1)\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \text{ avec } u_0 = u_1 = 1.$$

1. Par une méthode par équation caractéristique.
On rappelle que si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, l'équation caractéristique est : $t^2 = at + b$ et on détermine les racines q_1 et q_2 de cette équation.
Ici : $t^2 = t + 1$ et les racines sont

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Finalement, les solutions u_n sont de la forme $\lambda\alpha^n + \mu\beta^n$, avec $\lambda + \mu = 1$ et $\lambda\alpha + \mu\beta = 1$. On trouve :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right).$$

2. Par une méthode matricielle.
En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, alors la relation de récurrence devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n \\ u_{n+1} & = & u_{n+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On va diagonaliser A. Rapidement, $\chi_A(t) = t^2 - t - 1$, donc A a pour valeurs propres :
$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Comme les deux valeurs propres sont réelles et distinctes et comme $1+1=2$, A est diagonalisable.
On écrit donc : $A = P.\mathrm{Diag}\,(\alpha,\beta).P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

En effet, $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à α.
On écrit :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Or, $\alpha^2 = \alpha + 1$ et donc : $A\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha.\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$.
De même, on montre que $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre β.
De plus, une formule classique donne :

$$P^{-1} = \frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^n = P.\mathrm{Diag}(\alpha^n,\beta^n).P^{-1}$.
Il reste à courageusement faire le calcul.
On obtient :

$$A^n = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} -\alpha^n\beta + \alpha\beta^n & \alpha^n - \beta^n \\ -\alpha\beta\,(\alpha^n-\beta^n) & \alpha^{1+n} - \beta^{1+n} \end{pmatrix}.$$

Et par la relation : $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $U_n = AU_{n-1}$, on a :

$$U_n = A \times A \times ... \times AU_0 = A^nU_0 = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$U_n = \frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} -\alpha^n(-1+\beta) + (\alpha-1)\beta^n \\ -\alpha^{1+n}(-1+\beta) + (\alpha-1)\beta^{1+n} \end{pmatrix}.$$

Le terme u_n cherché est le coefficient du haut de U_n.
Comme $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, et que $\alpha+\beta = 1$, on a $-1+\beta = -\alpha$ et $\alpha - 1 = -\beta$, et on trouve finalement :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right).$$