CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et un problème indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

EXERCICE 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la **partie I** on établit des résultats généraux concernant les matrices A et P. Ces résultats sont utilisés dans les **parties II** et **III**, qui sont indépendantes.

Partie I

Q1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

Q2. Calculer les matrices A^2 et A^3. Vérifier que $A^3 = 2A - A^2$.

Q3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on admet que λ est une valeur propre de A et on désigne par X un vecteur propre associé à λ. Déduire de la question précédente que λ vérifie la relation :

$$\lambda^3 = 2\lambda - \lambda^2.$$

Q4. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x^3 + x^2 - 2x = 0$.
Que peut-on en déduire pour le spectre de A ?

Q5. Pour chacune des racines obtenues à la **question Q4**, déterminer $\ker(A - \lambda_i I)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Q6. **a)** Déduire de la question précédente que A est diagonalisable.

b) Soit la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
Expliquer sans calculs pourquoi on a : $A = PA'P^{-1}$.

Partie II

Q7. On considère le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 5y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) \end{cases}.$$

En posant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, résoudre le système (S).

Partie III

Q8. Soit $k \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble $\mathcal{C}_k = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, AM = k\,MA\}$.
Montrer que $\mathcal{C}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q9. On rappelle que la matrice P est inversible et que A' désigne la matrice qui vérifie $A = PA'P^{-1}$, ou encore $A' = P^{-1}AP$.
Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on lui associe la matrice $N = P^{-1}MP$. Montrer l'équivalence :

$$AM = k\,MA \iff A'N = k\,NA'.$$

Q10. En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$, avec $(a,b,c,a',b',c',a'',b'',c'') \in \mathbb{R}^9$, établir le système d'équations, noté (S'), vérifié par $(a,b,c,a',b',c',a'',b'',c'')$ caractérisant l'égalité :

$$A'N = k\,NA'.$$

Q11. Soit k un réel, on pose $\mathcal{C}'_k = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, A'N = k\,NA'\}$. On admet que $\mathcal{C}'_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Déterminer la forme des matrices des sous-espaces $\mathcal{C}'_0$, $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_{-2}$ et $\mathcal{C}'_{-1}$.

b) Déterminer une base de $\mathcal{C}_1$ et une base de $\mathcal{C}_{-1}$. On rappelle que les ensembles $\mathcal{C}_k$ ont été définis à la question **Q8**.

EXERCICE 2

Q12. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé, G désigne une variable aléatoire réelle définie sur Ω. On suppose que G suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

a) Que vaut $G(\Omega)$? Rappeler les valeurs $P(G = k)$ pour tout $k \in G(\Omega)$.

b) Rappeler les formules donnant l'espérance et la variance de G.

Dans la suite de l'exercice, on considère une urne contenant n boules noires et b boules blanches, avec $(n, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Les boules sont supposées indiscernables au toucher.

Q13. On tire une boule au hasard dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ? On notera p la valeur trouvée.
Quelle est la probabilité q d'obtenir une boule blanche ?

On effectue une suite infinie de tirages avec remise dans l'urne décrite précédemment. Après chaque tirage la boule piochée est remise dans l'urne. La composition de l'urne est donc identique pour tous les tirages.
On suppose qu'on dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ permettant d'étudier cette expérience aléatoire.

Q14. **a)** On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire et B la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
Déterminer les lois de N et de B.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(N = k \cap B = k)$. Les variables aléatoires N et B sont-elles indépendantes ?

Q15. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k l'évènement "obtenir une boule noire au $k-$ième tirage" et B_k l'évènement "obtenir une boule blanche au $k-$ième tirage".
On effectue à nouveau une suite infinie de tirages avec remise dans l'urne. On s'intéresse aux nombres de tirages successifs permettant d'obtenir deux changements de couleur dans les résultats. On obtient tout d'abord i boules successives d'une même couleur ($i \in \mathbb{N}^*$), puis j boules successives de l'autre couleur ($j \in \mathbb{N}^*$), puis une boule de la couleur initiale et on ne s'intéresse pas aux couleurs obtenues dans les tirages suivants.
La variable aléatoire X désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en début de tirage, la variable aléatoire Y désigne le nombre de boules de la même couleur apparues en deuxième partie de tirage.
Exemple : l'évènement $(X = 4 \cap Y = 2)$ est réalisé par les évènements "obtenir successivement 4 boules noires, puis 2 boules blanches puis 1 boule noire" ou "obtenir successivement 4 boules blanches, puis 2 boules noires puis 1 boule blanche".
On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

a) Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, déterminer $P(X = i \cap Y = j)$.
On admet les résultats suivants :
— pour $i \in \mathbb{N}^*$, la série numérique $\sum_{j \geq 1} P(X = i \cap Y = j)$ est convergente ;
— pour $j \in \mathbb{N}^*$, la série numérique $\sum_{i \geq 1} P(Y = j \cap X = i)$ est convergente ;
— les sommes des séries convergentes précédentes vérifient :

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}^*,\ P(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} P(X = i \cap Y = j) \\ \\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = j \cap X = i) \end{cases}.$$

b) Déterminer la loi de X.

c) Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = j) = p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}$.

d) **i)** Montrer que X a une espérance et la calculer.

ii) Montrer que $E(X) \geq 2$.
Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Montrer que Y a une espérance et que $E(Y) = 2$.

f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $P(X = n \cap Y = n) = (pq)^n$. En déduire $P(X = Y)$.

Q16. On considère la variable aléatoire $S = X + Y$.

a) Que vaut $S(\Omega)$?
Soit $k \in S(\Omega)$, décrire l'évènement $(S = k)$ à l'aide des évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$.

b) Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, déterminer $P(S = k)$ en fonction de k.

c) Si $p \neq q$, déterminer $P(S = k)$ en fonction de k.

PROBLÈME

Ce problème est constitué de deux parties. Dans la **partie I**, on établit des résultats préliminaires qui seront utilisés dans la **partie II**.

Partie I - Résultats préliminaires

Q17. **a)** Résoudre l'équation différentielle (H)

$$y' - y = 0$$

avec la condition de Cauchy $y(0) = 1$.

b) Déterminer les solutions développables en série entière de (H).

c) Retrouver ainsi le développement en série entière de la fonction exponentielle.

Q18. **a)** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $6 \times k! \leq (k+3)!$.

b) Soit $u > 0$, montrer, en utilisant les résultats des **questions Q17c)** et **Q18a)**, que :

$$\left| \exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{6} \exp(u).$$

Partie II

Q19. Soit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right). \end{array}$

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner son tableau de variations en précisant les limites de φ aux bornes de $\mathbb{R}_+^*$.

Q20. Soit l'application f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer f à l'aide d'une primitive Φ de φ. On justifiera brièvement l'existence de Φ.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de $u(x) = 2 - \exp\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)$, avec $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

d) Résoudre $u(x) > 0$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q21. **a)** En utilisant un encadrement de $\varphi(t)$ sur $[x, 2x]$, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \leq f(x) \leq x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

b) Déduire du résultat précédent les limites de $f(x)$ pour x tendant vers $+\infty$, puis pour x tendant vers 0.

c) Montrer que : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.

Q22. **a)** Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{t}} + \dfrac{1}{2t}$.

À l'aide des résultats de la **partie I**, montrer que :

$$\forall x > 0, \forall t \in [x, 2x], \left|\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - g(t)\right| \leq \frac{1}{6t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \leq \frac{1}{t\sqrt{t}} \varphi(x).$$

b) En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad \left|f(x) - \int_x^{2x} g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \varphi(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Q23. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = x + 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln(2).$$

a) En utilisant les résultats de la question précédente, montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall x > 0, \left|f(x) - h(x)\right| \leq \beta \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}.$$

En déduire que la courbe représentative de h est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

b) La courbe représentative de f admet-elle une asymptote oblique en $+\infty$? Justifier la réponse.

Q24. **a)** À l'aide de l'équivalent de $f(x)$ déterminé à la **question Q21c)**, déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

b) En utilisant l'encadrement obtenu à la **question Q21a)**, calculer la limite de $x \times f(x)$ pour x tendant vers 0 par valeurs supérieures.

En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

c) Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est divergente.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1072 – D'après documents fournis