Corrigé du CCP TPC 2018

Exercice 1.

Partie I

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Tout calcul fait, on trouve que <u>P est inversible</u> et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $\underline{A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -4 \\ -4 & 8 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -17 & 8 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$. On a bien $\underline{A^3 = 2A - A^2}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ. Alors $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Donc $A^2X = A(AX) = \lambda AX = \lambda^2 X$. Et de même, $A^3X = \lambda^3 X$. Puisque $A^3 + A^2 - 2A = 0$, il suit que $A^3X + A^2X - 2AX = 0$ c'est-à-dire $\lambda^3 X + \lambda^2 X - 2\lambda X = 0$, ou encore
$$(\lambda^3 - 2\lambda + \lambda^2)X = 0$$
Puisque $X \neq 0$, on en déduit que $\lambda^3 - 2\lambda + \lambda^2 = 0$ i.e. $\underline{\lambda^3 = 2\lambda - \lambda^2}$.

4. On a aisément $x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$. Donc <u>les solutions de $x^3 + x^2 - 2x = 0$ sont -2, 0 et 1</u>. On vient de voir que toute valeur propre λ de A vérifie $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$ donc $\underline{\mathrm{Sp}(A) \subset \{-2, 0, 1\}}$.

5. Après calculs, on trouve :
$$\underline{\ker(A+2I) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \quad \ker(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \ker(A-I) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]}$$

6. (a) On déduit de la question précédente que $\underline{\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 1\}}$. A admet donc 3 valeurs propres distinctes. Etant une matrice d'ordre 3, <u>A est diagonalisable</u>.

   (b) La matrice A est diagonalisable donc semblable à une matrice diagonale dont la diagonale est formée des valeurs propres de A. Ainsi, A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Il existe donc Q inversible telle que $A = QA'Q^{-1}$, la matrice Q étant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A. Avec les calculs faits précédents, on a donc bien $Q = P$ et ainsi : $\underline{A = PA'P^{-1}}$.

Partie II

7. On considère le système différentiel :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 3x(t)-5y(t)+2z(t) \\ y'(t) & = & 2x(t)-4y(t)+2z(t) \\ z'(t) & = & -x(t)+y(t) \end{array}\right.$$

En posant $X(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, on a $(S)\iff X'=AX$. Or :

$$X'=AX \iff X'=PA'P^{-1}X \iff P^{-1}X'=A'P^{-1}X.$$

Si on note $Y=P^{-1}X=\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on alors :

$$X'=AX \iff Y'=A'Y \iff Y'=A'Y \iff \left\{\begin{array}{lcl} u'(t) & = & 0 \\ v'(t) & = & v(t) \\ w'(t) & = & -2w(t) \end{array}\right.$$

Donc

$$X'=AX \iff \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{lcl} u(t) & = & a \\ v(t) & = & be^{t} \\ w(t) & = & ce^{-2t} \end{array}\right.$$

Enfin, $X=PY$ donc :

$$\underline{X'=AX \iff \exists (a,b,c)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & a+be^{t}+ce^{-2t} \\ y(t) & = & a+ce^{-2t} \\ z(t) & = & a-be^{t} \end{array}\right.}$$

Partie III

8. $\mathcal{C}_k\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, en notant 0_3 la matrice nulle de taille 3, on a $A0_3=0_3$ et $k0_3A=0_3$, donc $\underline{0_3\in\mathcal{C}_k}$. Ensuite, soit $(M,N,\lambda)\in\mathcal{C}_k^2\times\mathbb{R}$, alors :

$$A(\lambda M+N)=\lambda AM+AN=\lambda kMA+kNA=k(\lambda M+N)A,$$

donc $\underline{\lambda M+N\in\mathcal{C}_k}$ et finalement $\underline{\mathcal{C}_k \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

9. On a, en multipliant à gauche par P^{-1} puis à droite par P :

$$\begin{aligned} \underline{AM=kMA} &\iff PA'P^{-1}=kMPA'P^{-1} \\ &\iff A'P^{-1}=kP^{-1}MPA'P^{-1} \\ &\iff A'=kP^{-1}MPA' \\ &\iff \underline{A'=kNA'} \end{aligned}$$

10. On a $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, alors :

$$A'N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' \\ -2a'' & -2b'' & -2c'' \end{pmatrix}$$

et

$$kNA' = \begin{pmatrix} 0 & kb & -2kc \\ 0 & kb' & -2kc' \\ 0 & kb'' & -2kc'' \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\underline{A'N = kNA' \iff \left\{ \begin{array}{ccc} kb & = & 0 \\ kc & = & 0 \\ a' & = & 0 \\ (k-1)b' & = & 0 \\ (1+2k)c' & = & 0 \\ a" & = & 0 \\ (k+2)b'' & = & 0 \\ (k-1)c'' & = & 0 \end{array} \right.}$$

11. (a) D'après la question précèdente : <u>pour $k = 0$</u>,

$$A'N = 0 \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a' & = & 0 \\ b' & = & 0 \\ c' & = & 0 \\ a" & = & 0 \\ b'' & = & 0 \\ c'' & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc :

$$\underline{\mathcal{C}'_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

<u>pour $k = 1$</u>,

$$A'N = NA' \iff \left\{ \begin{array}{ccc} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ a' & = & 0 \\ c' & = & 0 \\ a" & = & 0 \\ b'' & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc :

$$\underline{\mathcal{C}'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}, (a, b', c'') \in \mathbb{R}^3 \right\}}$$

pour $k = -2$,

$$A'N = -2NA' \Longleftrightarrow \begin{cases} b &= 0 \\ c &= 0 \\ a' &= 0 \\ b' &= 0 \\ c' &= 0 \\ a" &= 0 \\ c'' &= 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\underline{\mathcal{C}'_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & b'' & 0 \end{pmatrix}, (a, b'') \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

enfin pour $k = -1$,

$$A'N = -NA' \Longleftrightarrow \begin{cases} b &= 0 \\ c &= 0 \\ a' &= 0 \\ b' &= 0 \\ c' &= 0 \\ a" &= 0 \\ b'' &= 0 \\ c'' &= 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\underline{\mathcal{C}'_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}}$$

(b) Une base de $\mathcal{C}'_1$ est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donc une base de $\mathcal{C}_1$ est :

$$\underline{\left\{ P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right\}}$$

De même, une base de $\mathcal{C}_{-1}$ est :

$$\underline{\left\{ P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right\}}$$

Exercice 2.

12. (a) $\underline{G(\Omega) = \mathbb{N}^*}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\underline{\mathbb{P}(G = k) = p(1-p)^{k-1}}$.

    (b) On a $\underline{\mathbb{E}(G) = \dfrac{1}{p} \text{ et } \mathbb{V}(G) = \dfrac{1-p}{p^2}}$

13. On a $\underline{p = \dfrac{n}{n+b} \text{ et } q = \dfrac{b}{n+b}}$.

14. (a) On a clairement $\underline{N \sim \mathcal{G}(p) \text{ et } B \sim \mathcal{G}(q)}$.

    (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\underline{\mathbb{P}(N = k \cap B = k) = 0}$ (la première boule noire et la première boule blanche ne peuvent pas apparaître au même tirage). En particulier,

$$\mathbb{P}(N = 1 \cap B = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(N = 1)\mathbb{P}(B = 1)$$

donc $\underline{N \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

15. (a) Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors :

$$(X = i) \cap (Y = j) = \left(\bigcap_{k=1}^{i} N_k \cap \bigcap_{k=i+1}^{i+j} B_k \cap N_{i+j+1} \right) \bigcup \left(\bigcap_{k=1}^{i} B_k \cap \bigcap_{k=i+1}^{i+j} N_k \cap B_{i+j+1} \right)$$

Les événements $\left(\bigcap_{k=1}^{i} N_k \cap \bigcap_{k=i+1}^{i+j} B_k \cap N_{i+j+1}\right)$ et $\left(\bigcap_{k=1}^{i} B_k \cap \bigcap_{k=i+1}^{i+j} N_k \cap B_{i+j+1}\right)$ sont incompatibles donc :

$$\mathbb{P}\left((X = i) \cap (Y = j)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i} N_k \cap \bigcap_{k=i+1}^{i+j} B_k \cap N_{i+j+1} \right) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i} B_k \cap \bigcap_{k=i+1}^{i+j} N_k \cap B_{i+j+1} \right)$$

Les tirages sont indépendants et $\mathbb{P}(N_k) = p$ et $\mathbb{P}(B_k) = q$ donc :

$$\underline{\mathbb{P}\left((X = i) \cap (Y = j)\right) = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j}.$$

    (b) Grâce à aux résultats admis, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{P}(X = i)} &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X = i) \cap (Y = j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j \\
&= p^{i+1} \sum_{j=1}^{+\infty} q^j + q^{i+1} \sum_{j=1}^{+\infty} p^j \\
&= p^{i+1} \frac{q}{1-q} + q^{i+1} \frac{p}{1-p} \\
&\underline{= p^i q + q^i p}
\end{aligned}$$

(c) De même, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbb{P}(Y=j)} &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X=i) \cap (Y=j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j \\
&= q^j p \sum_{j=1}^{+\infty} p^i + p^j q \sum_{i=1}^{+\infty} q^i \\
&= q^j p \frac{p}{1-p} + p^j q \frac{q}{1-q} \\
&\underline{= p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}}
\end{aligned}$$

(d) i. X admet une espérance ssi la série $\sum_{i\geq 1} i\mathbb{P}(X=i)$ converge absolument. Comme c'est une SATP, cela revient à étudier la convergence de la série. On sait que la série entière $\sum_{i\geq 1} x^i$ a un rayon de convergence égal à 1. D'après le cours, la série $\sum_{i\geq 1} ix^i$ a même rayon de convergence égal à 1. Elle converge donc en particulier si $0 < x < 1$. Finalement, la série $\sum_{i\geq 1} ip^i$ converge puis $\sum_{i\geq 1} iqp^i$ converge et il en est de même de la série $\underline{\sum_{i\geq 1} ipq^i}$. Finalement, la série $\underline{\sum_{i\geq 1} i\mathbb{P}(X=i) = \sum_{i\geq 1} i(p^i q + q^i p)}$ converge. Et :

$$\underline{\mathbb{E}(X)} = qp\sum_{i=1}^{+\infty} ip^{i-1} + qp\sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1} = qp\frac{1}{(1-p)^2} + qp\frac{1}{(1-q)^2} = \underline{\frac{p}{q} + \frac{q}{p}}.$$

ii. On note $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Une étude rapide de cette fonction sur $\mathbb{R}_+^*$ montre qu'elle admet un minimum en $x = 1$ qui vaut $f(1) = 2$. Donc,

$$\underline{E(X) = f(p/q) \geq 2}.$$

(e) La série $\sum_{i\geq 1} j\mathbb{P}(X=j)$ converge (absolument) donc Y a une espérance et :

$$\underline{\mathbb{E}(Y) = p^2\sum_{j=1}^{+\infty} jq^{j-1} + q^2\sum_{j=1}^{+\infty} jp^{j-1} = p^2\frac{1}{(1-q)^2} + q^2\frac{1}{(1-p)^2} = 2.}$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la question 15.(a) :

$$\underline{\mathbb{P}\left((X=n) \cap (Y=n)\right) = p^{n+1}q^n + q^{n+1}p^n = p^n q^n (p+q) = p^n q^n = (pq)^n}.$$

De plus,

$$(X = Y) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} ((X = n) \cap (Y = n))$$

Les événements formant l'union étant deux à deux incompatibles :

$$\underline{\mathbb{P}(X = Y)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left((X = n) \cap (Y = n)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (pq)^n = \underline{\frac{pq}{1 - pq}}.$$

16. (a) $S = X + Y$ donc $\underline{S(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$. Soit $k \geq 2$, alors :

$$\underline{(S = k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (X = i) \cap (Y = k - i)}$$

(b) Les événements formant l'union étant deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = k) &= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\left((X = i) \cap (Y = k - i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(p^{i+1} q^{k-i} + q^{i+1} p^{k-i}\right) \\ &= pq^k \sum_{i=1}^{k-1} (p/q)^i + qp^k \sum_{i=1}^{k-1} (q/p)^i \end{aligned}$$

Si $p = q = 1/2$, alors $p/q = q/p = 1$ donc $\underline{\mathbb{P}(S = k) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} (k - 1) = \frac{k - 1}{2^k}}$

(c) Si $p \neq q$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = k) &= pq^k \sum_{i=1}^{k-1} (p/q)^i + qp^k \sum_{i=1}^{k-1} (q/p)^i \\ &= pq^k \frac{1 - (p/q)^{k-1}}{1 - (p/q)} + qp^k \frac{1 - (q/p)^{k-1}}{1 - (q/p)} \\ &= \underline{\frac{pq^k - qp^k}{1 - (p/q)} + \frac{qp^k - pq^k}{1 - (q/p)}} \end{aligned}$$

Problème.

Partie 1 - Résultats préliminaires

17. (a) L'unique solution est la fonction $x \mapsto e^x$.

(b) Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$. Alors : y est solution de (H) sur $]-R, R[$ ssi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{a_0}{n!}$$

On a alors $R = +\infty$ et les solutions DSE de (H) sont les fonctions :

$$\underline{x \mapsto c\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},\ c \in \mathbb{R}}$$

(c) En ajoutant la condition initiale, on a $c = 1$ et donc la seule solution DSE de (H) est la fonction :

$$\underline{x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on a donc :

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

18. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\underline{(k+3)! = k! \times (k+1) \times (k+2) \times (k+3) \geq k! \times 1 \times 2 \times 3 = 6 \times k!}$$

(b) Soit $u > 0$, alors en faisant un changement d'indice et en utilisant la question précédente :

$$\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{k+3}}{(k+3)!} = u^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{(k+3)!} \leq u^3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{6k!} = \frac{u^3}{6}\exp(u).$$

Donc on a bien :

$$\underline{\left|\exp(u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}\right| \leq \frac{u^3}{6}\exp(u).}$$

(la valeur absolue ne sert pas à grand chose ici car $u > 0$).

Partie 2

19. Soit l'application $\begin{array}{rccc} \varphi & : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) \end{array}$

   (a) La fonction $\underline{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   (b) φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) < 0$$

   Donc $\underline{\varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$. De plus,

$$\underline{\lim_{t\to 0} \varphi(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 1.}$$

20. Soit l'application définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\underline{\varphi \text{ est continue sur } [x, 2x] \text{ donc } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$ (comme intégrale d'une fonction continue sur un segment). La fonction $\underline{\varphi \text{ étant continue sur } [x, 2x], \text{ elle admet une primitive } \Phi}$ et on a :

$$\underline{f(x) = \Phi(2x) - \Phi(x).}$$

   (b) La fonction $\underline{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ car Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque primitive d'une fonction continue) donc $x \mapsto \Phi(2x)$ aussi ($2x > 0$) et une différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 2\Phi'(2x) - \Phi'(x) = 2\varphi(2x) - \varphi(x) = 2\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

   Or

$$2\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)\left(2 - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) u(x)$$

   où $u(x) = 2 - \exp\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)$, avec $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Finalement,

$$\underline{f'(x) = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) u(x).}$$

   Comme $\exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right) > 0$, alors $\underline{f'(x) \text{ est du signe de } u(x)}$.

   (d) On a

$$u(x) > 0 \iff 2 > \exp\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right) \iff \sqrt{x} > \frac{\alpha}{\ln(2)} \iff x > \frac{\alpha^2}{\ln(2)^2}$$

   Finalement, $\underline{f \text{ est décroissante sur } \left]0, \dfrac{\alpha^2}{\ln(2)^2}\right] \text{ et croissante sur } \left[\dfrac{\alpha^2}{\ln(2)^2}, +\infty\right[}$.

21. (a) La fonction φ est décroissante sur $[x, 2x]$ donc :

$$\forall t \in [x, 2x],\ \varphi(2x) \leq \varphi(t) \leq \varphi(x).$$

On intègre entre x et $2x$, par croissance de l'intégrale, il vient :

$$\underline{\forall x > 0,\ x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \leq f(x) \leq x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).}$$

(b) On a $x \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \longrightarrow +\infty$ quand x tend vers $+\infty$, donc par minoration,

$$\underline{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Par croissance comparée de exp et de $x \mapsto x^2$, on a de même,

$$\underline{f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(c) Puisque $x > 0$, on a :

$$\forall x > 0,\ \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \leq \frac{f(x)}{x} \leq \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Les deux extrémités de l'inégalité tendent vers 1 quand x tend vers $+\infty$, donc par le théorème d'encadrement, $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ i.e. $\underline{f(x) \underset{+\infty}{\sim} x.}$

22. (a) Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2t}$.

On applique le résultat de la question 3, avec $u = \frac{1}{\sqrt{t}} > 0$:

$$\forall t > 0, \left|\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - g(t)\right| \leq \frac{1}{6t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \leq \frac{1}{t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Soit $x > 0$, alors par décroissance de φ, pour tout $t \in [x, 2x]$, $\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \leq \varphi(x)$. Finalement, on aboutit bien à :

$$\underline{\forall x > 0,\ \forall t \in [x, 2x],\ \left|\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - g(t)\right| \leq \frac{1}{6t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \leq \frac{1}{t\sqrt{t}}\varphi(x).}$$

(b) Soit $x > 0$, alors

$$\left|f(x) - \int_x^{2x} g(t)dt\right| = \left|\int_x^{2x} \left(\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - g(t)\right) dt\right| \leq \int_x^{2x} \left|\exp\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - g(t)\right| dt$$

En utilisant la question précédente et la croissance de l'intégrale, il suit que :

$$\underline{\forall x > 0,\ \left|f(x) - \int_x^{2x} g(t)dt\right| \leq \varphi(x) \int_x^{2x} \frac{1}{t\sqrt{t}}dt.}$$

23. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x) = x + 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln(2).$$

(a) Soit $x > 0$, alors

$$\int_x^{2x} g(t)dt = \int_x^{2x} (1 + \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2t})dt = x + 2\left(\sqrt{2x} - \sqrt{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\ln(2x) - \ln(x)\right) = h(x).$$

Et $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t\sqrt{t}}dt = \left[-2t^{-1/2}\right]_x^{2x} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) = \frac{2\alpha}{\sqrt{x}}$ En posant $\beta = 2\alpha > 0$, il vient donc avec la question précédente :

$$\underline{\forall x > 0,\ |f(x) - h(x)| \leq \beta\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}.}$$

Et $\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0$ quand $x \to +\infty$ donc, par le théorème d'encadrement $f(x) - h(x) \longrightarrow 0$, c'est-à-dire que la courbe de h est asymptote à celle de f en $+\infty$.

(b) Une asymptote oblique est une droite d'équation $y = ax + b$. Si la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$, alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f(x) - (ax + b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas, d'après la question précédente, on aurait

$$h(x) - (ax + b) = (h(x) - f(x)) + (f(x) - (ax + b)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or $h(x) - (ax + b) = (1 - a)x + 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln(2) - b$.
Si $a \neq 1$, alors $h(x) - (ax + b) \sim (1 - a)x$ donc $h(x) - (ax + b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$: absurde.
Si $a = 1$, alors $h(x) - (ax + b) \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{x}$ donc $h(x) - (ax + b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$: absurde.
Finalement, la courbe représentative de f n'admet pas d'asymptote oblique en $+\infty$.

24. (a) La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et $f(x) \sim x$ donc par équivalent, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

(b) En utilisant l'encadrement obtenu à la question (21a), si $x > 0$, en multipliant par x, il vient

$$x^2 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \leq xf(x) \leq x^2 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

Par minoration, il suit que $xf(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$. Donc au voisinage de 0, $xf(x) \geq 1$ i.e.

$$f(x) \geq \frac{1}{x}.$$

Par comparaison avec une intégrale de Riemann divergente, il suit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ diverge.

(c) La fonction f est positive donc :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx$$

L'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ diverge (elle vaut $+\infty$) donc il suit que $\underline{\int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ diverge}}$.

FIN