TELEEXERCICES01-T01
Enoncé

Exercice 01

1. Justifier que $\arctan x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour tout $x > 0$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation :
$$\frac{2}{\pi} \arctan x = \cos x$$
admet une unique solution $x_n \in [2n\pi,\, (2n+1)\pi]$.
3. Montrer que $x_n \sim 2n\pi$, quand $n \to +\infty$.
On pose dans la suite $y_n = x_n - 2n\pi$.
4. Pour quelles valeurs de x, a-t-on : $x = \arccos(\cos x)$? Montrer que $y_n = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan x_n\right)$ et en déduire la limite de (y_n).

Indications :
1. C'est l'occasion de tracer le graphe de $x \mapsto \arctan x$.
2. On étudiera $f : x \mapsto \frac{2}{\pi}\arctan x - \cos x$ et on étudiera le signe de $f(2n\pi)$ et $f(2n\pi + \pi)$.
3. On part de l'encadrement : $2n\pi < x_n < 2n\pi + \pi$.
4. On se rappelle que arccos est à valeurs dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour trouver la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$, on remarque que x_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 02

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Indications :
Méthode 01. Synopsis : on cherche le polynôme caractéristique $\chi_A(t)$ de A puis on remarque qu'il y a deux racines λ_1 (qui est double) et λ_2 (qui est simple). Puis on détermine une base de vecteurs propres du sous-espace propre E_{λ_1} et de même E_{λ_2}. On en déduit la matrice de passage P et si $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$, on a une relation entre $\hat{A}$, P, D et P^{-1} à écrire. On en déduit A^n.

Méthode 02. Synopsis : on remarque que $A = B + 2I_3$ puis on calculera B^2 en fonction de B puis B^k en fonction de B. On utilisera alors la formule du binôme de Newton pour calculer $A^n = (B + 2I_3)^n$.