TELEEXERCICES01-T02
Enoncé

Exercice 01

1. Linéariser $\sin^3 x$.
2. Résoudre l'équation différentielle linéaire : $y''(x) - y(x) = \sin^3 x$.

Indications :
1. On utilise la formule de Leonhard Euler : $\sin x = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ et comme on calcule $\sin^3 x$, on utilise alors $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Le développement donnera $\sin^3 x$ sous la forme $a\sin x + b\sin(3x)$, où a et b sont à déterminer.
2. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y''(x) - y(x) = 0$. (On utilisera l'équation caractéristique.) Puis, on déterminera une solution particulière de $y''(x) - y(x) = a\sin x$ de la forme $y_{p_1}(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x$, puis on déterminera une solution particulière de $y''(x) - y(x) = b\sin(3x)$ de la forme $y_{p_2}(x) = \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x)$.

Exercice 02

On sait que parmi tous les élèves de prépa de la filière TSI, $\frac{1}{1000}$ sont des génies (QI>150). On fait une étude dans plusieurs grands lycées, où l'effectif total en TSI1-TSI2 est de 500 élèves.

1. Soit X le nombre de ces élèves qui sont des génies. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance.
2. Par quelle loi au programme peut-on approcher X ? Donner son espérance.

   Dans la suite, on pourra faire les calculs avec la loi exacte ou utiliser son approximation.
3. On peut détecter les génies grâce à un test que passent les élèves.
   Quelle est la probabilité qu'au moins un des 500 élèves soit finalement un génie ?
4. On suppose que l'on sait qu'il y a au moins un génie dans l'échantillon.
   Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes soient des génies ?

Indications :
1. C'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. À vous de trouver n et p.
2. Une seule loi convient, pour celui qui connait son cours.
3. On rappelle que si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$ et si X suit la loi de Poisson de paramètre λ, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.