TELEEXERCICES01-T03
Enonce

Exercice 01

Soit Γ la courbe paramétrée définie par $f : t \mapsto \left(\dfrac{1}{t+3}, \dfrac{1}{t-2}\right)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

1. Déterminer t pour que la tangente en $M(t)$ admette $\vec{i} + 4\vec{j}$ pour vecteur directeur.
2. Étudier et tracer l'arc paramétré correspondant.

Indications :
1. On sait que la tangente en un point régulier $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ est portée par le vecteur dérivé $f'(t_0)$. On sait d'autre part que deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
2. Pour étudier une courbe paramétrée, on rappelle que l'on doit :
1) Trouver le domaine de définition des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
2) Etablir les éventuelles parités et symétries pour réduire le domaine d'étude.
3) Repérer les points stationnaires (qui annulent à la fois $x'(t)$ et $y'(t)$). Et étudier leur genre.
4) Dresser le tableau de variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ en trouvant les limites aux bords du domaine de définition.
5) Étudier les branches infinies pour trouver les asymptotes horizontanes, verticales ou obliques.
6) Tracer l'arc avec les tangentes particulières (horizontales, verticales) et les éventuelles asymptotes.

Exercice 02

Déterminer les solutions polynomiales de l'équation différentielle

$$(E) : \; t^2 y''(t) - 4ty'(t) + 6y(t) = 0.$$

En déduire une base des solutions.

Indications :
On fait comme pour la recherche d'une solution développable en série entière, sauf que la somme ne va pas jusqu'à l'infini. On pose $y_p(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. On écrit $y_p'(t)$ puis $y_p''(t)$ puis $ty_p'(t)$ puis $t^2 y_p''(t)$ sous formes de sommes et on remplace dans l'équation différentielle. On remarque alors que tous les a_k sont nuls sauf pour certains k à trouver.
Pour la base des solutions, quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions ?