TELEEXERCICES01-T04

Énoncé

Exercice 01

On pose $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que K est diagonalisable en calculant le polynôme caractéristique χ_K .
2. Quel est le rang de K ?
3. Calculer K^2 en fonction de K . En déduire K^n .

Indications :

1. On calcule $\chi_K(t) = \text{Det}(tI_4 - K)$ en développant soit directement selon une rangée, soit d'abord en sommant toutes les colonnes à la première puis on pourra factoriser $\chi_K(t)$ à la fin.
2. On sait que le rang de K est $4 - \dim \text{Ker } K$.
3. On calculera K^2 en fonction de K puis K^3 en fonction de K puis on devinera K^n en fonction de K puis on fera une preuve par récurrence.

Exercice 02

Ici $a > 0$ fixé.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-a\sqrt{t}} dt$ et $\int_0^{+\infty} 2ue^{-au} du$ sont définies et égales (on pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{t}$).
2. Calculer $\int_0^{+\infty} 2ue^{-au} du$.

Indications :

1. On pourra commencer par l'existence. On pourra utiliser le fait que si $f(t) = o(g(t))$ quand t tend vers $+\infty$ et que l'intégrale $\int_b^{+\infty} g(t) dt$ existe (avec $b > 0$ fixé) alors $\int_b^{+\infty} f(t) dt$ existe. Pour le reste de la question, l'indication est déjà donnée.
 2. On fera une I.P.P à $\int_0^X 2ue^{-au} du$. Et on fera tendre X vers $+\infty$.
- On rappelle que $\int_0^X f(u)g'(u) du = - \int_0^X f'(u)g(u) du + [f(u)g(u)]_0^X$.