TELEEXERCICES01-T01
Enoncé

Exercice 01

1. Justifier que $\arctan x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ pour tout $x > 0$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation :
$$\frac{2}{\pi} \arctan x = \cos x$$
admet une unique solution $x_n \in [2n\pi,\, (2n+1)\pi]$.
3. Montrer que $x_n \sim 2n\pi$, quand $n \to +\infty$.
On pose dans la suite $y_n = x_n - 2n\pi$.
4. Pour quelles valeurs de x, a-t-on : $x = \arccos(\cos x)$? Montrer que $y_n = \arccos\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x_n\right)$ et en déduire la limite de (y_n).

Indications :
1. C'est l'occasion de tracer le graphe de $x \mapsto \arctan x$.
2. On étudiera $f : x \mapsto \dfrac{2}{\pi} \arctan x - \cos x$ et on étudiera le signe de $f(2n\pi)$ et $f(2n\pi + \pi)$.
3. On part de l'encadrement : $2n\pi < x_n < 2n\pi + \pi$.
4. On se rappelle que arccos est à valeurs dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Pour trouver la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$, on remarque que x_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 02

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Indications :
Méthode 01. Synopsis : on cherche le polynôme caractéristique $\chi_A(t)$ de A puis on remarque qu'il y a deux racines λ_1 (qui est double) et λ_2 (qui est simple). Puis on détermine une base de vecteurs propres du sous-espace propre E_{λ_1} et de même E_{λ_2}. On en déduit la matrice de passage P et si $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$, on a une relation entre $\hat{A}$, P, D et P^{-1} à écrire. On en déduit A^n.

Méthode 02. Synopsis : on remarque que $A = B + 2I_3$ puis on calculera B^2 en fonction de B puis B^k en fonction de B. On utilisera alors la formule du binôme de Newton pour calculer $A^n = (B + 2I_3)^n$.

Correction

Exercice 01

1. C'est donc l'occasion de tracer le graphe de $x \mapsto \arctan x$. C'est une fonction croissante et impaire définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus $\arctan 0 = 0$ et donc il est clair que $\arctan x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour tout $x > 0$.

2. On étudie $f : x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan x - \cos x$. Sa dérivée est :

$$f'(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)} + \sin x.$$

Comme l'on travaille sur $[2n\pi,\, (2n+1)\pi]$, $\sin x \geqslant 0$ et comme $\frac{2}{\pi(1+x^2)} > 0$, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [2n\pi,\, (2n+1)\pi]$.
Étudions le signe de $f(2n\pi)$ et $f(2n\pi + \pi)$.
On a :

$$f(2n\pi) = \frac{2}{\pi} \arctan(2n\pi) - \cos(2n\pi) = \frac{2}{\pi} \arctan(2n\pi) - 1.$$

Or, $\frac{2}{\pi} \arctan(2n\pi) \in \left]0 \times \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2} \times \frac{2}{\pi}\right[=]0, 1[$ et donc :

$$f(2n\pi) = \frac{2}{\pi} \arctan(2n\pi) - 1 < 0.$$

De même,

$$f(2n\pi + \pi) = \frac{2}{\pi} \arctan(2n\pi + \pi) - \cos(2n\pi + \pi) = \frac{2}{\pi} \arctan(2n\pi + \pi) + 1 > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x_n \in [2n\pi, 2n\pi + \pi]$ tel que $f(x_n) = 0$.
Donc l'équation :

$$\frac{2}{\pi} \arctan x = \cos x$$

admet une unique solution $x_n \in [2n\pi,\, (2n+1)\pi]$.

3. On part de l'encadrement :

$$2n\pi < x_n < 2n\pi + \pi \Rightarrow 1 = \frac{2n\pi}{2n\pi} < \frac{x_n}{2n\pi} < \frac{2n\pi + \pi}{2n\pi}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, la quantité $\frac{x_n}{2n\pi}$ tend vers 1 d'après le théorème des Gendarmes.

4. On se rappelle que arccos est à valeurs dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Pour quelles valeurs de x, a-t-on : $x = \arccos(\cos x)$? Quand $x \in [0, \pi]$.
Comme $y_n \in [0, \pi]$, et comme $\cos(y_n + 2n\pi) = \frac{2}{\pi} \arctan x_n$, on a :

$$y_n = \arccos\left(\frac{2}{\pi} \arctan x_n\right).$$

Pour trouver la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$, on remarque que x_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Donc $\frac{2}{\pi} \arctan x_n$ tend vers 1 et y_n tend vers $0 = \arccos 1$.

Exercice 02

Méthode 01. Synopsis : on cherche le polynôme caractéristique $\chi_A(t)$ de A puis on remarque qu'il y a deux racines λ_1 (qui est double) et λ_2 (qui est simple). On trouve :

$$\chi_A(t) = (t-4)(t-2)^2.$$

Puis on détermine une base de vecteurs propres du sous-espace propre E_{λ_1} et de même E_{λ_2}. On trouve :

$$E_{\lambda_1} = E_2(A) = \text{Vect}\left((-1,0,1),(1,1,0)\right) \text{ et } E_{\lambda_2} = E_4(A) = \text{Vect}\left((1,0,1)\right).$$

On en déduit la matrice de passage P. On a :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $D = \text{Diag}\,(2,2,4)$, on a une relation entre $\hat{A}$, P, D et P^{-1} :

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}.$$

On trouve après calculs :

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+4^n & 2^n-4^n & -2^n+4^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ -2^n+4^n & 2^n-4^n & 2^n+4^n \end{pmatrix}.$$

Méthode 02. Synopsis : on remarque que $A = B + 2I_3$ puis on calcule B^2 en fonction de B ;
On trouve : $B^2 = 2B$ puis :

$$\forall k \in \mathbf{N}^\star,\ B^k = 2^{k-1}B.$$

On utilise alors la formule du binôme de Newton pour calculer $A^n = (B+2I_3)^n$.

$$A^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k 2^{n-k}I_3 = \binom{n}{0}2^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{k-1}2^{n-k}B.$$

Ce qui donne :

$$A^n = 2^nI_3 + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right)2^{n-1}B.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, on a :

$$A^n = 2^nI_3 + (2^n-1)2^{n-1}B = \frac{1}{2}\left(2^{n+1}I_3 + (4^n-2^n)B\right).$$

On retrouve A^n.