

ÉQUATIONS ET SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS

$\iff$ est un symbole logique qui traduit une relation d'équivalence, et se lit « si et seulement si », ou « est équivalent à ». On ne l'utilisera pour l'instant **QUE** dans les équations.

• Méthode pour les équations du premier degré :

« les x d'un côté, les nombres de l'autre » (développer avant si besoin)

Exemples de présentations possibles :

$$\begin{array}{lcl}
 3x - 12 = 0 & \iff & 3x = 12 \quad \text{OU} \quad 3x - 12 = 0 \\
 & \iff & x = \frac{12}{3} \\
 & \iff & \underline{x = 4}
 \end{array}$$

• Méthode pour les systèmes de deux équations :

on peut procéder par substitution : on utilise l'une des deux équations pour exprimer une inconnue en fonction de l'autre, et on remplace dans l'autre équation. Penser à numéroté les équations pour clarifier la rédaction.

Exemple :
$$\begin{cases} 2x - y = 3 & (1) \\ -3x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

D'après (1), $y = 2x - 3$.

On remplace dans (2) on obtient

$$\begin{aligned}
 -3x + 2(2x - 3) &= 1 \\
 -3x + 4x - 6 &= 1 \\
 x &= 7
 \end{aligned}$$

Donc $y = 2 \times 7 - 3 = 11$.

Finalement $\boxed{x = 7 \text{ et } y = 11}$.

• Équations se ramenant au premier degré :

on rappelle le théorème du produit nul : si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple :

$$\begin{aligned}
 (3x + 4)(x - 2) &= 0 \iff 3x + 4 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0 \\
 &\iff 3x = -4 \text{ ou } x = 2 \\
 &\iff \underline{x = -\frac{4}{3} \text{ ou } x = 2}
 \end{aligned}$$

FRACTIONS

Une fraction est un quotient de deux nombres, noté $\frac{a}{b}$.

a est le **numérateur**, b est le **dénominateur**

Simplification : on peut multiplier (ou diviser) le numérateur et le dénominateur par le même nombre sans changer la valeur de la fraction.

$$\frac{a \times b}{c \times b} = \frac{a}{c}$$

Exemple : $\frac{18}{10} = \frac{9 \times 2}{5 \times 2} = \frac{9}{5}$

Addition et soustraction : pour ajouter (ou soustraire) deux fractions, on commence par les mettre au même dénominateur puis on ajoute les numérateurs.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{a \times d + c \times b}{b \times d}$$

Exemples : $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$
 $\frac{3}{4} + \frac{5}{2} = \frac{3}{4} + \frac{10}{4} = \frac{13}{4}$

Multiplication : on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple : $\frac{3}{5} \times \frac{11}{7} = \frac{33}{35}$

Inverse : pour obtenir l'inverse d'une fraction, on échange numérateur et dénominateur.

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad \text{autrement dit} \quad \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

Division : pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse.

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemple : $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{1} = \frac{3 \times 2}{8 \times 1} = \frac{3}{4}$

PUISSANCES

$\lceil \times 2 \rceil \lceil \times 2 \rceil$					$\lceil \times 2 \rceil \lceil \times 2 \rceil \lceil \times 2 \rceil \lceil \times 2 \rceil$						$\lceil \times 2 \rceil \lceil \times 2 \rceil$			
....	2^{-n-1}	2^{-n}	2^{-n+1}	...	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	...	2^{n-1}	2^n	2^{n+1}	
....	$\frac{1}{2^{n+1}}$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2^{n-1}}$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...				
$\uparrow \div 2 \uparrow \div 2$					$\uparrow \div 2 \uparrow \div 2$						$\uparrow \div 2 \uparrow \div 2$			

La puissance n’est qu’une notation. En se rappelant sa définition ci-dessous, on retrouve facilement toutes les formules de calcul.

a⁰ = 1

aⁿ = $\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

a⁻ⁿ = $\frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$

On déduit :

- a¹ = a
- aⁿ × a^p = a^{n+p}

Exemple : 4⁵ × 4³ = $\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{5 \text{ facteurs}} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{3 \text{ facteurs}} = 4^8$

8 facteurs

- (a b)ⁿ = aⁿ × bⁿ

Exemple : 2⁵ × 3⁵ = (2 × 3)⁵ = 6⁵

en effet : 2⁵ × 3⁵ = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3 = (2 × 3) × (2 × 3) × (2 × 3) × (2 × 3) × (2 × 3) = (2 × 3)⁵

- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

Exemple : $\frac{7^5}{7^2} = 7^{5-2} = 7^3$

en effet : $\frac{7^5}{7^2} = \frac{\cancel{7} \times \cancel{7} \times 7 \times 7 \times 7}{\cancel{7} \times \cancel{7}} = 7 \times 7 \times 7$

- (a^p)ⁿ = a^{p×n}

Exemple : (5³)⁴ = 5¹²

en effet : (5³)⁴ = $\underbrace{5^3 \times 5^3 \times 5^3 \times 5^3}_{4 \text{ fois le facteur } 5^3} = \underbrace{(5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5) \times (5 \times 5 \times 5)}_{4 \text{ paquets de 3 fois le nombre } 5} = 5^{4 \times 3} = 5^{12}$

RACINE CARRÉE

√0 = 0 et √1 = 1

et

si x et y sont positifs : √x × y = √x × √y et $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Exemple : √48 = √16 × 3 = √16 × √3 = 4√3

 √a + b ≠ √a + √b

FACTORISATION ET DÉVELOPPEMENTS

Rappel des identités remarquables.

Factoriser une somme, c'est écrire cette somme sous la forme d'un produit.
Développer un produit, c'est écrire ce produit sous la forme d'une somme.

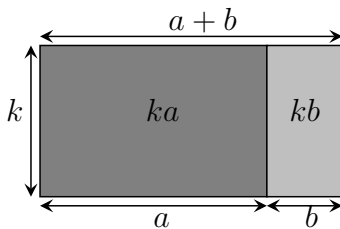
Voici quatre égalités qui sont vraies quels que soient les réels a , b et k :

on développe

$$\begin{array}{l} k(a+b) = ka + kb \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \end{array}$$

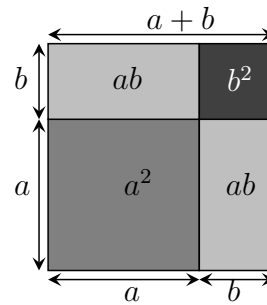
on factorise

On peut illustrer géométriquement les deux premières égalités :



L'aire totale se calcule de deux façons :

- ★ longueur $\times$ largeur : $k(a+b)$
- ★ la somme des aires des deux rectangles : $ka + kb$



L'aire du grand carré se calcule de deux façons :

- ★ longueur² : $(a+b)^2$
- ★ somme des aires : $a^2 + 2 \times ab + b^2$

Exemples :

1. $A(x) = -4x^2 + 4x$: dans chacun des termes de la somme, le facteur $4x$ est commun. On peut donc factoriser $A(x)$ par $4x$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } A(x) &= 4x(-x) + 4x \times 1 \\ &= \underline{4x(-x + 1)} \end{aligned}$$

2. $B(x) = 6x - 3 + (2x - 1)^3$: on reconnaît $2x - 1$ comme facteur commun car $6x - 3 = 3(2x - 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } B(x) &= 3(2x - 1) + (2x - 1) \times (2x - 1)^2 \\ &= (2x - 1) \left(3 + (2x - 1)^2 \right) \\ &= (2x - 1) \left(3 + 4x^2 - 4x + 1 \right) \\ &= (2x - 1) \left(4x^2 - 4x + 4 \right) \\ &= \underline{4(2x - 1)(x^2 - x + 1)} \end{aligned}$$

3. $C(x) = 3x - 7 + (3x - 7)^2 + 12x(3x - 7)$: le facteur commun est $(3x - 7)$ car $3x - 7 = (3x - 7) \times 1$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } C(x) &= (3x - 7) \left(1 + (3x - 7) + 12x \right) \\ &= \underline{(3x - 7)(15x - 6)} \end{aligned}$$