

Énoncés

Étude des circuits électriques I

Autour du courant électrique

Entraînement 1.1 — Une bataille de courants.

Lequel de ces trois courants électriques présente la plus forte intensité ?

- (a) 5 000 électrons durant 1 ms (c) 20 milliards d'électrons durant 1 min
 (b) 0,2 mol d'électrons durant 1 an

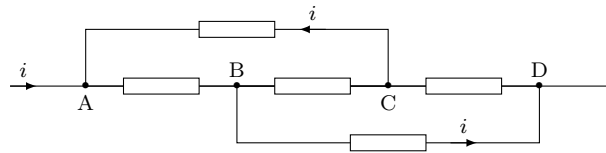
.....

Entraînement 1.2

L'intensité du courant traversant un fil de cuivre vaut $I = 4,0 \text{ mA}$.

Combien d'électrons traversent la section du fil pendant 10 s ?

Entraînement 1.3 — Loi des nœuds (I).



Les courants indiqués sur le schéma ci-dessus sont algébriques.

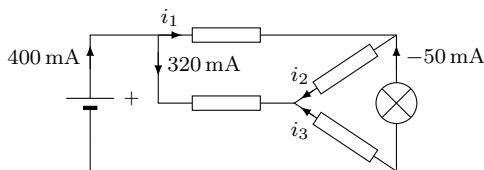
En utilisant la loi des nœuds, déterminer en fonction de i les courants suivants (on note i_{AB} le courant qui va de A vers B, etc.) :

a) i_{AB}

b) i_{BC}

c) i_{CD}

Entraînement 1.4 — Loi des nœuds (II).



On considère le circuit électrique représenté ci-dessus.

À partir de la loi des nœuds, calculer l'intensité des courants sans utiliser la calculatrice.

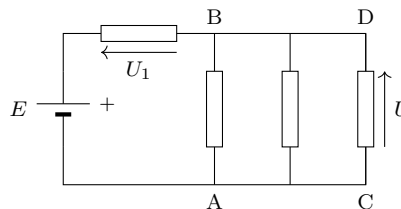
- a) i_1 b) i_2 c) i_3

Autour de la tension électrique

Entraînement 1.5 — Loi des mailles.

Un circuit électrique est formé d'une pile de f.é.m E et de quatre dipôles. Certaines tensions sont indiquées.

À partir de la loi des mailles, exprimer en fonction de E et U_1 les tensions suivantes :

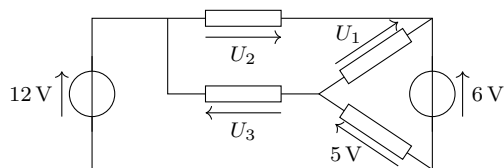


- a) U
- b) $U_{AB} = V(A) - V(B)$
- c) U_{DA}

Entraînement 1.6 — Calculer une tension.

On considère le circuit électrique formé de deux sources idéales de tension et de quatre dipôles, comme représenté ci-contre.

À partir de la loi des mailles, calculer les tensions :

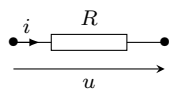


- a) U_1
- b) U_2
- c) U_3

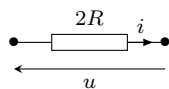
Loi d'Ohm

Entraînement 1.7 — Caractéristiques.

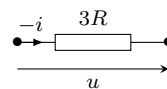
On considère les cas suivants :



Résistance 1



Résistance 2



Résistance 3

Dans chaque cas, exprimer i en fonction de u et R .

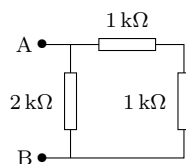
- a) Résistance 1
- b) Résistance 2
- c) Résistance 3

Entraînement 1.8 — Résistances associées.

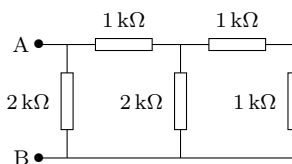
Exprimer la résistance équivalente des dipôles AB suivants :



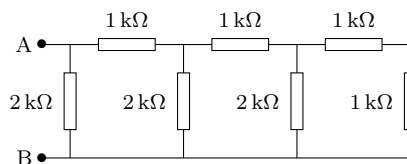
Entraînement 1.9 — Trois résistances équivalentes.



dipôle 1



dipôle 2



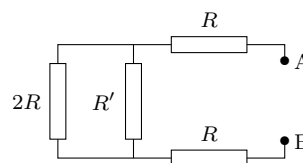
dipôle 3

Sans utiliser la calculatrice, calculer la résistance équivalente :

- a) du dipôle 1 b) du dipôle 2 c) du dipôle 3

Entraînement 1.10 — Une autre résistance équivalente.

On considère le dipôle AB constitué uniquement de conducteurs ohmiques.



Exprimer la résistance équivalente du dipôle AB en fonction de R et R'

Entraînement 1.11 — Quelle résistance choisir ?

La résistance équivalente d'un dipôle s'écrit :

$$R_{\text{eq}} = \frac{4R(R + R')}{2R + R'}.$$

Déterminer la valeur de R' pour que :

- a) $R_{\text{eq}} = 3R$ b) $R_{\text{eq}} = \frac{8}{3}R$ c) $R_{\text{eq}} = 2R$

Résoudre une équation électrique

Entraînement 1.12 — Une équation de maille.

Dans un circuit, la loi des mailles se traduit par la relation $R_1 I + R_2(I_0 + I) = 2R_2 I_0$.

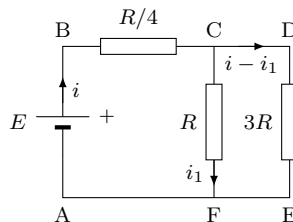
- a) On suppose que $R_1 = 2R_2$. Exprimer I en fonction de I_0

- b) Exprimer I en fonction de R_1 , R_2 et I_0

Entraînement 1.13 — Circuit à 2 mailles.

On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les courants algébriques i et i_1 comme indiqué ci-contre.

Exprimer E en fonction de i , i_1 et R en appliquant la loi des mailles dans la maille :



a) (ABCF)

b) (ABDE)

Entraînement 1.14

Dans l'entraînement précédent, les grandeurs i et i_1 vérifient le système
$$\begin{cases} Ri + 4Ri_1 = 4E \\ 13Ri - 12Ri_1 = 4E. \end{cases}$$

a) Déterminer i en fonction de E et R

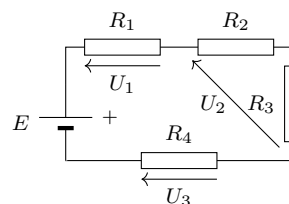
b) Déterminer i_1 en fonction de E et R

Diviseurs

Entraînement 1.15 — Un diviseur de tension.

On forme un circuit avec une pile de f.é.m E et quatre conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1 , U_2 et U_3 comme indiqué ci-contre.

Exprimer en fonction de E , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 , les tensions :

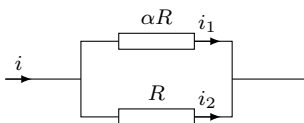


a) U_1

b) U_2

c) U_3

Entraînement 1.16 — Un diviseur de courant.

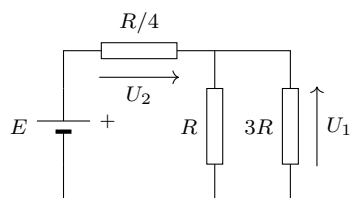


a) Pour quelle valeur de α a-t-on $i_1 = i/3$?

b) Pour quelle valeur de α a-t-on $i_2 = 3i_1$?

Entraînement 1.17 — Exercice de synthèse (I).

On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1 et U_2 comme indiqué ci-contre.

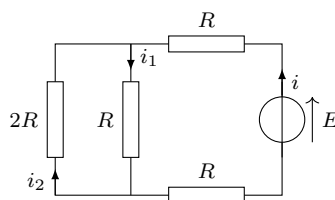


a) Calculer la résistance équivalente aux deux conducteurs ohmiques en parallèle

b) À l'aide de la formule du diviseur de tension, exprimer U_1 en fonction de E et R ...

c) Faire la même chose pour U_2

Entraînement 1.18 — Exercice de synthèse (II).



a) Après avoir simplifié le circuit, calculer i en fonction de E et R

b) En déduire i_1 à partir de la formule du diviseur de courant

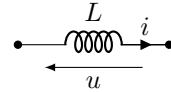
c) En déduire i_2

Étude des circuits électriques II

Bobines

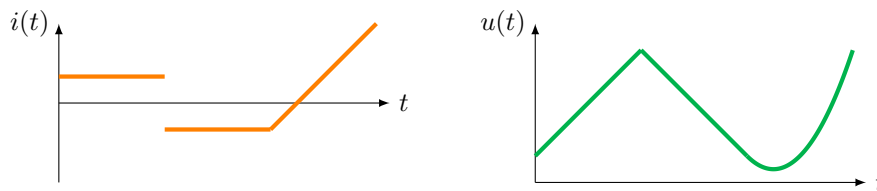
En convention récepteur, l'inductance L d'une bobine vérifie l'équation différentielle :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$



Entraînement 2.1 — Bobine ou pas ?

On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme une bobine ?

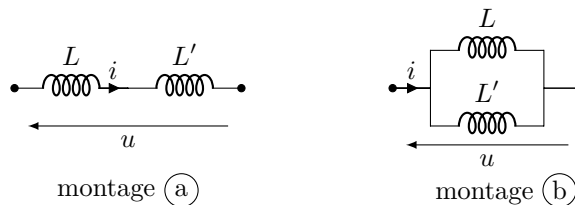
(a) oui

(b) non

.....

Entraînement 2.2 — Inductances équivalentes.

On considère deux bobines, d'inductances L et L' , regroupées dans les montages suivants :



a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a)

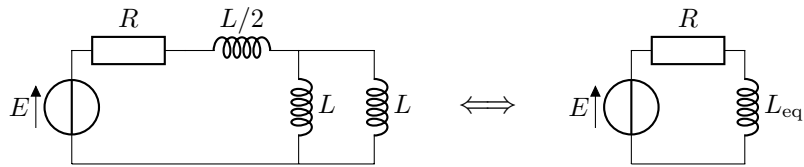
b) En déduire l'inductance équivalente du montage (a)

c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b)

d) En déduire l'inductance équivalente du montage (b)

Entraînement 2.3 — Simplifions !

On souhaite remplacer les bobines par un dipôle équivalent.

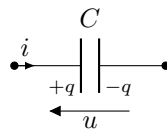


Déterminer L_{eq}

Condensateurs

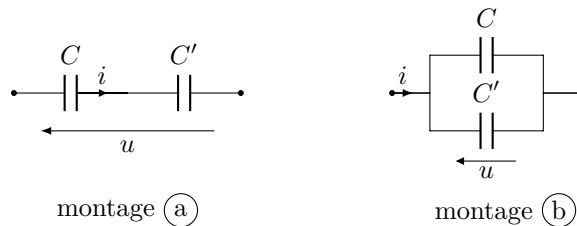
En convention récepteur, la capacité C d'un condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}.$$



Entraînement 2.4 — Condensateurs équivalents.

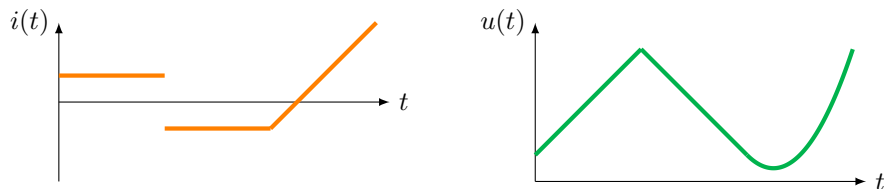
On considère deux condensateurs, de capacités C et C' , regroupés dans les montages suivants :



- a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a)
- b) En déduire la capacité équivalente du montage (a)
- c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b)
- d) En déduire la capacité équivalente du montage (b)

Entraînement 2.5 — Condensateur ou pas ?

On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme un condensateur ?

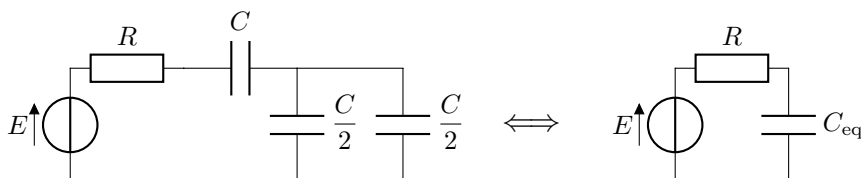
(a) oui

(b) non

.....

Entraînement 2.6 — Simplifions !

On considère le montage suivant, constitué de plusieurs condensateurs, d'un générateur et d'un conducteur ohmique. On souhaite remplacer les condensateurs par un dipôle équivalent.



Déterminer C_{eq}

Conditions initiales et régime stationnaire

On utilisera dans cette partie les notations suivantes pour une grandeur donnée x :

• $x(0^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} x(t)$

• $x(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} x(t)$

• $x(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

Entraînement 2.7 — Condensateurs et bobines en régime stationnaire.

En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps.

a) Dans ce cas, un condensateur se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé

(b) une source de tension

(c) un interrupteur ouvert

.....

b) Quant à la bobine, elle se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé

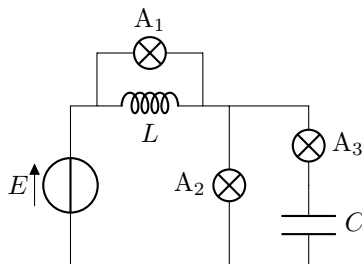
(b) une source de courant

(c) un interrupteur ouvert

.....

Entraînement 2.8 — Éclairage en régime permanent.

On considère le circuit suivant, constitué de lampes (symbolisées par $\otimes$) que l'on peut assimiler à des résistances qui brillent quand elles sont parcourues par un courant électrique :



Le régime permanent étant établi, la ou les ampoules qui brillent sont :

(a) l'ampoule A_1

(b) l'ampoule A_2

(c) l'ampoule A_3

.....

Entraînement 2.9 — Relations de continuité.

Dans ce QCM, plusieurs réponses sont possibles pour chaque question.

a) Aux bornes de quel(s) dipôle(s) la tension est-elle toujours continue ?

(a) une résistance

(c) un condensateur

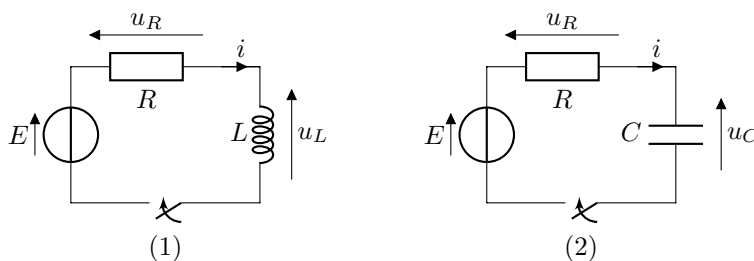
(b) une bobine

(d) un interrupteur fermé

.....

On considère les deux circuits (1) et (2) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

On suppose de plus que le condensateur est initialement déchargé.



b) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (1) ?

(a) i

(b) u_L

(c) u_R

.....

c) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (2) ?

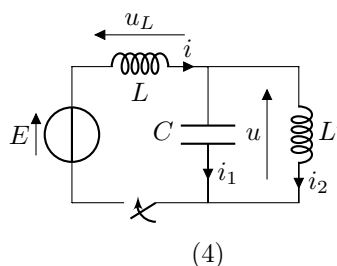
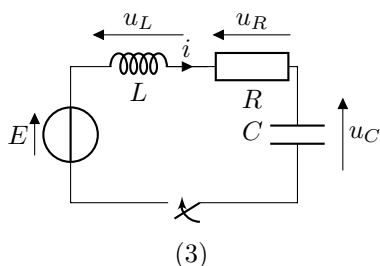
(a) i

(b) u_C

(c) u_R

.....

On considère à présent les deux circuits (3) et (4) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. On suppose de plus que les condensateurs sont initialement déchargés.



d) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (3) ?

- (a) i (b) u_L (c) u_R (d) u_C

e) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (4) ?

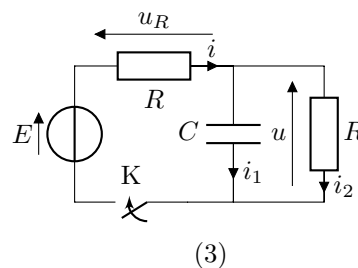
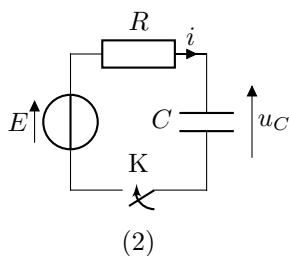
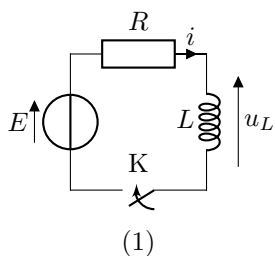
- (a) i (b) i_1 (c) u (d) u_L

Entraînement 2.10 — Conditions initiales pour circuits du premier ordre.

On considère trois circuits constitués de générateurs de tension de f.é.m. constante E , de conducteurs de résistance R ainsi que de condensateurs de capacité C et d'une bobine d'inductance L .

L'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$.

Tous les condensateurs sont initialement déchargés.



On considère dans un premier temps le circuit (1).

- a) Exprimer $i(0^+)$ b) Exprimer $u_L(0^+)$

On considère à présent le circuit (2).

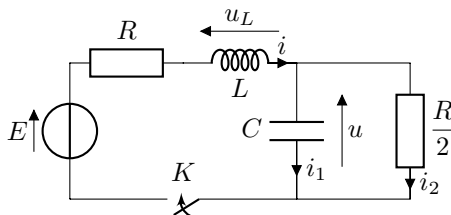
- c) Exprimer $i(0^+)$

On considère finalement le circuit (3).

- d) Exprimer $u_R(0^+)$ e) En déduire $i_1(0^+)$

Entraînement 2.11 — Circuit à deux mailles.

Le circuit suivant, constitué de deux mailles indépendantes, est alimenté par un générateur de tension de f.é.m. E constante :



Pour ce circuit, on considère de plus que :

- l'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$;
- le condensateur est initialement déchargé.

Exprimer :

- a) $u(0^+)$
- b) $\frac{du}{dt}(0^+)$
- c) $i(+\infty)$
- d) $u(+\infty)$

Circuits du premier ordre

On dit qu'un circuit est *du premier ordre* quand il est régi par une équation différentielle qui se met sous la forme canonique suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t), \quad (*)$$

où τ est la constante de temps représentative de la durée du régime transitoire.

Quand l'équation différentielle est écrite comme dans (*), on dit qu'elle est *sous forme canonique*.

Entraînement 2.12 — Constantes de temps.

On donne des exemples d'équations différentielles régissant des grandeurs électriques d'un circuit.

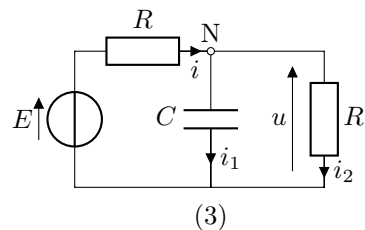
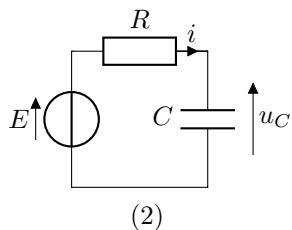
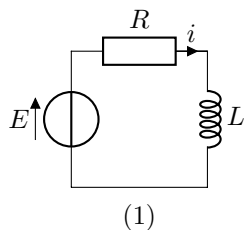
Dans chaque cas, déterminer l'expression de la constante de temps τ .

- a) $L \frac{di(t)}{dt} = E - Ri(t)$
- b) $RC \frac{du_C(t)}{dt} = E - 2u_C(t)$

Entraînement 2.13 — Des mises en équations.

On cherche à obtenir l'équation différentielle qui régit le comportement d'une grandeur électrique dans chacun des circuits suivants.

Cette équation devra être donnée sous forme canonique.



On considère le circuit (1).

- a) À partir de la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

.....

On considère maintenant le circuit (2). Déterminer :

- b) l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$

- c) l'équation différentielle pour le courant $i(t)$

On considère enfin le circuit (3), qui comporte deux mailles. En appliquant la loi des nœuds au point N, déterminer :

- d) la relation entre le courant $i(t)$, la tension $u(t)$ et $\frac{du(t)}{dt}$..

- e) En déduire l'équation différentielle pour la tension $u(t)$...

Entraînement 2.14 — Allez, on s'entraîne !

N'oubliez pas d'exprimer une solution particulière avant d'appliquer les conditions initiales !

- a) Résoudre $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{E}{\tau}$ avec $u_C(0) = 0$

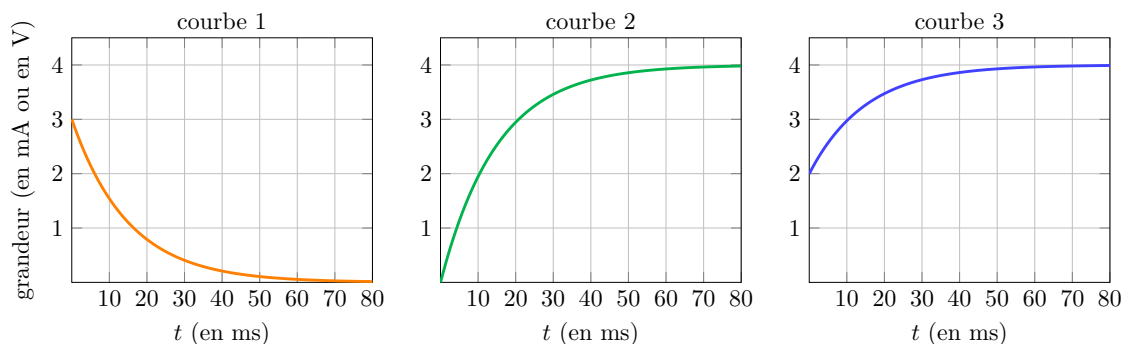
- b) Résoudre $\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}i(t) = 0$ avec $i(0) = \frac{E}{R}$

- c) Résoudre $\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{E}{2\tau}$ avec $u(0) = \frac{E}{2}$

Entraînement 2.15 — Analyse de courbes.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois grandeurs au cours du temps :

- deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
- une intensité $i(t)$.



a) On a :

$$u_1(t) = E_1(1 - e^{-t/\tau}).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

b) On a :

$$u_2(t) = E_2\left(1 - \frac{e^{-t/\tau}}{2}\right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

c) On a :

$$i(t) = \frac{E_1}{R} e^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

Déterminer les valeurs numériques de :

d) E_1

e) E_2

f) R

Circuits du second ordre

Entraînement 2.16 — Équation canonique.

De nombreux circuits du second ordre sont en fait des oscillateurs dont l'équation canonique est de la forme :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t),$$

où ω_0 est appelée *pulsation propre* et Q *facteur de qualité*.

Donner la dimension de :

a) ω_0

b) Q

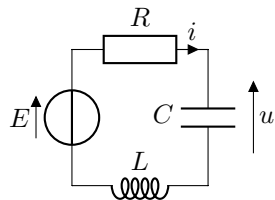
On considère l'équation $RC \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$. Exprimer :

c) ω_0

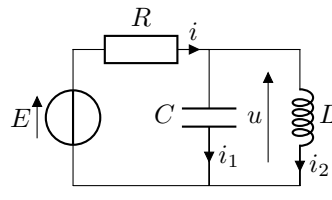
d) Q

Entraînement 2.17 — Mise en équation.

On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les f.é.m. des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1



montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

a) Dans le montage 1

b) Dans le montage 2

Entraînement 2.18 — Équations du type « oscillateur harmonique ».

a) Résoudre $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2(u_C(t) - E) = 0$ avec $\begin{cases} u_C(0) = 0 \\ \frac{du_C}{dt}(0) = 0 \end{cases}$.

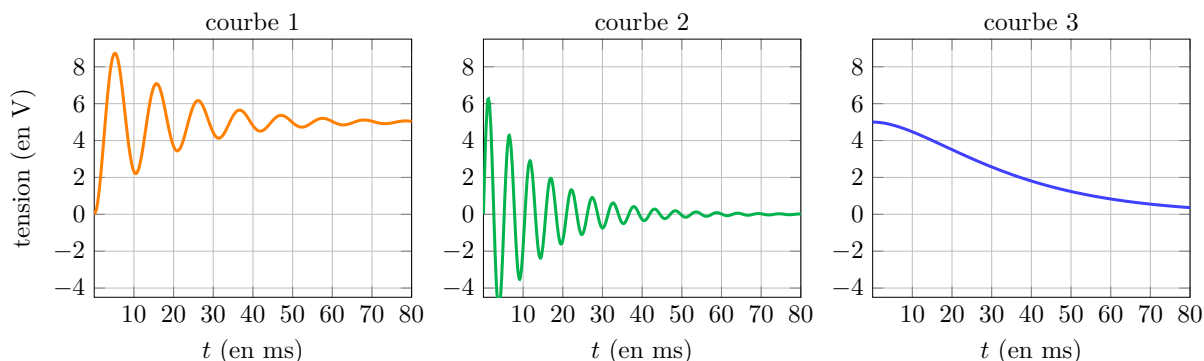
b) Résoudre $\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \omega_0^2 i(t) = 0$ avec $\begin{cases} i(0) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L} \end{cases}$

Entraînement 2.19 — Réponses d'un circuit du second ordre.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$ au cours du temps.

Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = C^{te}.$$



a) Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

b) On a :

$$u_1(t) = ae^{-t/\tau_1} - be^{-t/\tau_2}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

c) On a :

$$u_2(t) = E \sin(\Omega t) e^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

d) On a :

$$u_3(t) = E \left[1 - (\cos(\Omega' t) + a \sin(\Omega' t)) e^{-t/\tau'} \right].$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

e) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$.

.....

Étude des filtres

Nombres complexes et association de dipôles

Entraînement 3.1 — Un entraînement fondamental.

Un nombre complexe peut se mettre sous les formes suivantes :

- $\underline{Z} = a + jb$ avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire ;
- $\underline{Z} = Z_0 \exp(j\varphi) = Z_0(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$ avec $Z_0 \geq 0$ son module et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument.

a) Exprimer Z_0 en fonction de a et b

b) On suppose $a \neq 0$. Exprimer $\tan(\varphi)$ en fonction de a et b

On suppose que $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

c) Si $a \geq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in]-\pi, 0]$

(f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

.....

d) Si $a > 0$ et $b \leq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in]-\pi, 0]$

(f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

.....

Entraînement 3.2 — Impédances complexes des composants de base.

Les impédances complexes d'un résistor de résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C auxquels on impose une pulsation ω sont respectivement :

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

Calculer le module Z_0 et l'argument $\varphi \in]-\pi, \pi]$ de chacune de ces impédances :

a) Z_0 de $\underline{Z}_R$...

c) Z_0 de $\underline{Z}_L$

e) Z_0 de $\underline{Z}_C$...

b) φ de $\underline{Z}_R$

d) φ de $\underline{Z}_L$

f) φ de $\underline{Z}_C$

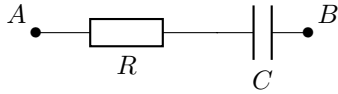
Entraînement 3.3 — Associations de dipôles.

On rappelle la règle pour déterminer l'impédance complexe équivalente à celle de dipôles associés :

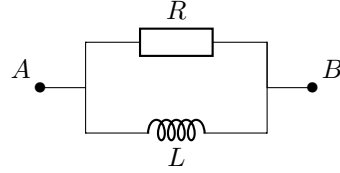
- si les dipôles sont en série : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Z}_i$;
- si les dipôles sont en parallèle : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\sum_i 1/\underline{Z}_i}$.

À l'aide de ces règles, déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}_{AB}$ des associations de dipôles suivantes :

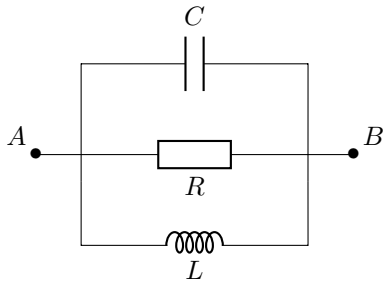
a)



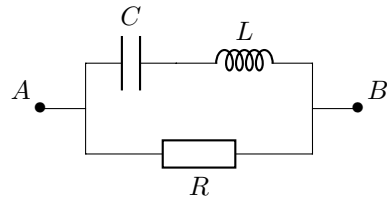
b)



c)



d)



a) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

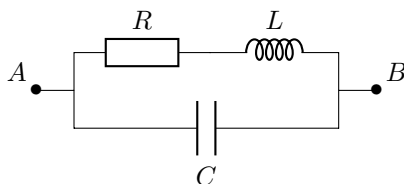
b) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

c) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

d) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

Entraînement 3.4 — À la recherche de la bonne impédance.

Un groupe d'étudiants doit trouver l'impédance $\underline{Z}_{AB}$ du dipôle AB ci-dessous :



Quelle proposition correspond à l'impédance du dipôle AB ?

(a) $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

(b) $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 + jRC\omega}$

(c) $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 - jRC\omega}$

.....

Signaux périodiques

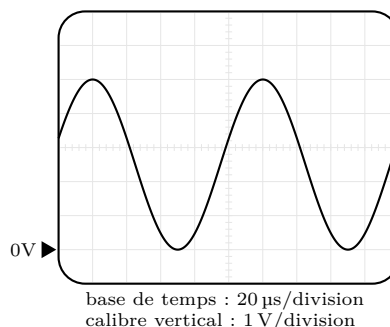
Entraînement 3.5 — Analyse du signal provenant d'un GBF.

En TP, un élève observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de basses fréquences (GBF).

Aider cet élève à analyser le signal de tension mesuré ci-contre en déterminant sa fréquence f_0 et son amplitude U_0 .

a) f_0

b) U_0



Entraînement 3.6 — Expression d'une tension.

Nous disposons d'une tension sinusoïdale $u(t)$ de période $T_0 = 1$ ms, d'amplitude $U_0 = 2$ V et de phase à l'origine $\varphi = 0$ rad.

Parmi les propositions ci-dessous, laquelle correspond à l'expression littérale de cette tension $u(t)$?

(a) $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$

(c) $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$

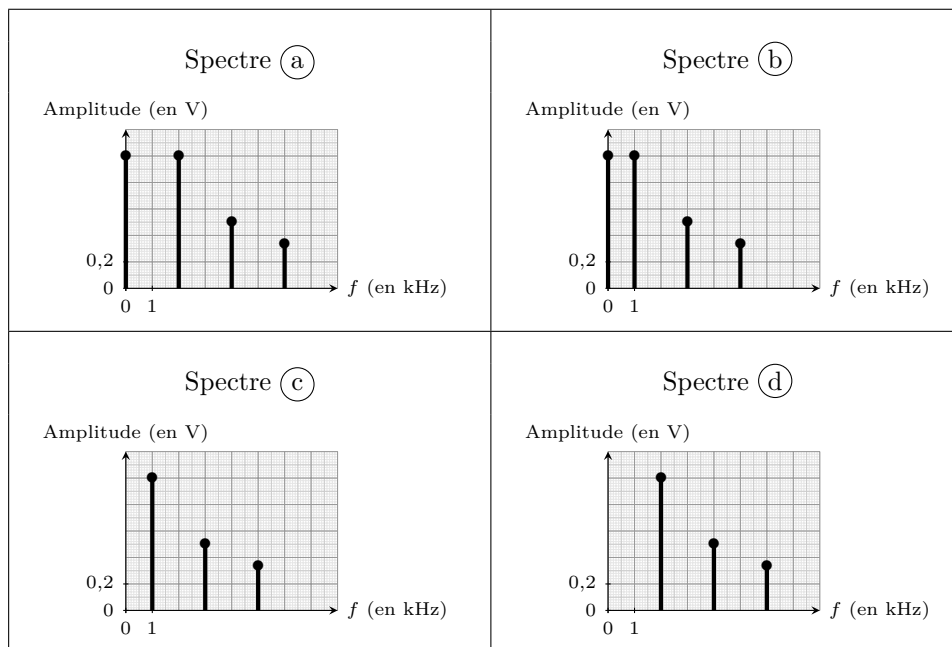
(b) $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

(d) $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

.....

Entraînement 3.7 — Pêle-mêle.

Un étudiant dispose de quatre spectres en amplitude et de quatre signaux. Malheureusement, l'ensemble est mélangé. Pouvez-vous l'aider à associer le bon signal au bon spectre ((a), (b), (c) ou (d)) ?



Signal n° 1 $A_1 \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cos(5\omega_0 t) \right)$ avec $A_1 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 1 \text{ kHz}$	Signal n° 2 $A_2 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) \right)$ avec $A_2 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 2 \text{ kHz}$
Signal n° 3 $A_3 \left(\cos((\omega_0 - \omega_1)t) + \frac{1}{2} \cos((\omega_0 + \omega_1)t) + \frac{1}{3} \cos((\omega_0 + 3\omega_1)t) \right)$ avec $A_3 = 1 \text{ V}$, $f_0 = 3 \text{ kHz}$ et $f_1 = 1 \text{ kHz}$	Signal n° 4 $A_4 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(5\omega_0 t) \right)$ avec $A_4 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 1 \text{ kHz}$

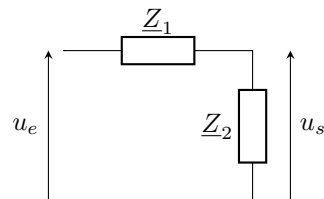
- | | |
|--|--|
| <p>a) Spectre du signal n° 1 <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/></p> | <p>c) Spectre du signal n° 3 <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/></p> |
| <p>b) Spectre du signal n° 2 <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/></p> | <p>d) Spectre du signal n° 4 <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/></p> |

Fonctions de transfert

Entraînement 3.8 — Filtre passe-bande.

Nous disposons du filtre ci-contre, constitué de deux dipôles dont les impédances complexes sont :

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \text{avec} \quad C = 47 \text{ nF} \text{ et } R = 1 \text{ k}\Omega.$$



Nous souhaitons écrire la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

a) À l'aide d'un pont diviseur de tension,

exprimer $\underline{H}(j\omega)$

c) Identifier Q

b) Identifier H_0

d) Identifier et calculer ω_0 .

Entraînement 3.9 — Filtre du second ordre.

Nous disposons d'un filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. On a $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$ et $R = 220 \text{ }\Omega$.

Un étudiant obtient les trois égalités suivantes :

$$R\underline{i} = \underline{u}_e - \underline{u}, \quad R\underline{i}_1 = \underline{u} - \underline{u}_s \quad \text{et} \quad R\underline{i}_2 = jRC\omega\underline{u}.$$

a) À l'aide de la loi des nœuds, exprimer $\underline{i}$ en fonction de $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$

b) Utiliser la réponse précédente et les trois égalités fournies pour exprimer $\underline{u}_e$ en fonction de $\underline{u}$ et $\underline{u}_s$.

.....

L'étudiant montre, grâce à un pont diviseur de tension, que $\underline{u} = (1 + jRC\omega)\underline{u}_s$.

c) En déduire la fonction de transfert simplifiée $\underline{H}(j\omega)$

En comparant la réponse précédente à la forme canonique de $\underline{H}(j\omega)$ donnée, identifier :

d) H_0

e) ω_0

f) Q

De la fonction de transfert au diagramme de Bode

Entraînement 3.10 — Calcul de gain en décibels.

On considère les fonctions de transfert suivantes : $\underline{H}_1 = 3,0$; $\underline{H}_2 = j\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$.

Le gain en décibels G_{dB} d'un filtre se détermine à partir de la relation :

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|).$$

Déterminer le gain en décibels associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\underline{H}_1$ | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ | <input type="text"/> |
| b) $\underline{H}_2$ | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) $\underline{H}_3$ | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ | <input type="text"/> |

Entraînement 3.11 — Calcul de phase.

On reprend les mêmes fonctions de transfert que précédemment : $\underline{H}_1 = 3,0$; $\underline{H}_2 = j\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j\frac{\omega}{\omega_1}$.

Le déphasage φ introduit par un filtre entre les signaux d'entrée et de sortie se détermine à partir de la relation :

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H})}{\text{Re}(\underline{H})}\right).$$

Déterminer le déphasage associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous :

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\underline{H}_1$ | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$ | <input type="text"/> |
| b) $\underline{H}_2$ | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) $\underline{H}_3$ | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$ | <input type="text"/> |

Entraînement 3.12 — Diagramme de Bode en phase.

On utilise un filtre passe-haut de fonction de transfert $\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Déterminer la valeur du déphasage $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx))$ du filtre pour des signaux tels que :

- | | |
|--|----------------------|
| a) $\omega = \omega_0$ (la pulsation propre du filtre) | <input type="text"/> |
| b) $\omega \gg \omega_0$ (en hautes fréquences) | <input type="text"/> |
| c) $\omega \ll \omega_0$ (en basses fréquences) | <input type="text"/> |

Entraînement 3.13 — Calcul de gain.

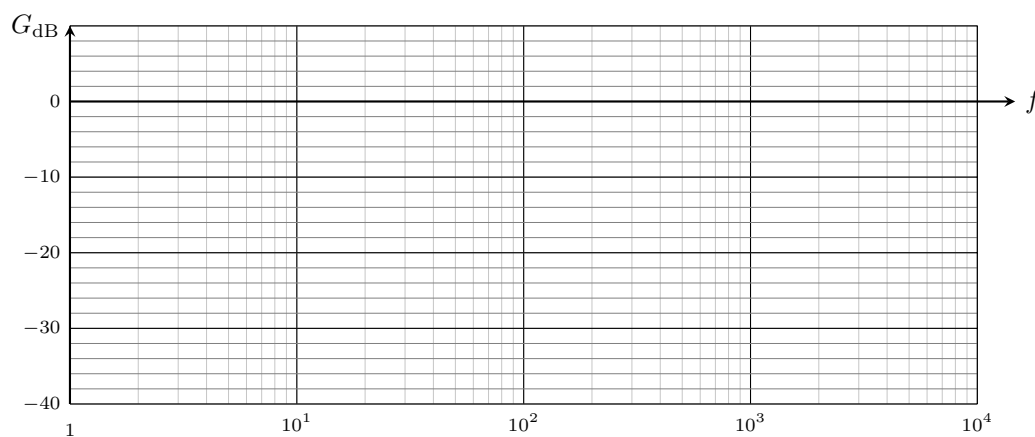
Pour les fonctions de transfert suivantes, évaluer le gain $G(x) = |\underline{H}(jx)|$ pour $x = 1$.

- a) $\underline{H}(jx) = \frac{1 - jx}{1 + jx}$
- b) $\underline{H}(jx) = -\frac{jx}{1 + jx}$
- c) $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + 2jmx + (jx)^2}$ avec $m = 2$

Entraînement 3.14 — Tracé sur papier semi-logarithmique.

Un élève souhaite étudier le comportement d'un filtre passe-haut en basses fréquences. Pour cela, il relève les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie pour différentes fréquences bien inférieures à la fréquence de coupure du filtre.

Fréquence (en Hz)	200	700	2 000
Amplitude du signal d'entrée ($U_{\text{entrée}}$ en V)	1	1	1
Amplitude du signal de sortie (U_{sortie} en V)	0,04	0,14	0,40



Le gain en décibels est donné par la relation $G_{\text{dB}} = 20 \log \left(\frac{U_{\text{sortie}}}{U_{\text{entrée}}} \right)$.

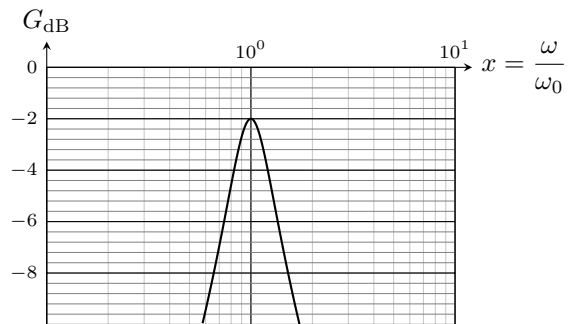
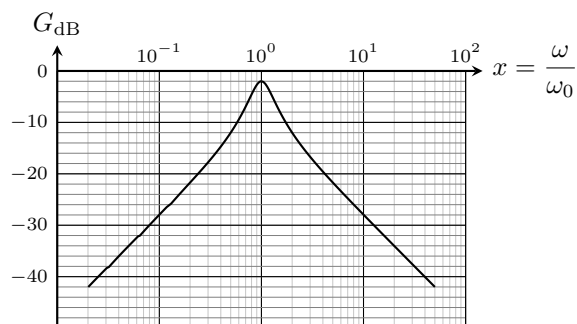
Calculer le gain en décibels pour chacune des fréquences et placer le point correspondant sur le graphe ci-dessus.

- a) Point A : $f = 200 \text{ Hz}$
- b) Point B : $f = 700 \text{ Hz}$
- c) Point C : $f = 2\,000 \text{ Hz}$
- d) Déterminer la pente de la droite passant les points A, B et C

Entraînement 3.15 — Bande passante et facteur de qualité d'un filtre.

On dispose d'un filtre passe-bande de fréquence propre $f_0 = 15 \text{ kHz}$, dont les deux fréquences de coupure à -3 dB sont f_{c1} et f_{c2} (avec $f_{c1} < f_{c2}$), et dont la fréquence de résonance est f_r .

Le diagramme de Bode en gain du filtre en fonction de $x = f/f_0$ et un agrandissement sont fournis.



À partir des graphiques donnés ci-dessus, déterminer les différentes grandeurs caractéristiques du filtre :

- a) f_r b) f_{c1} c) f_{c2}

Énergie et puissance électriques

Pour commencer

Entraînement 4.1 — Puissance et énergie.

Le chargeur d'un téléphone portable consomme une puissance de 5 W. La charge complète de la batterie (à partir d'une batterie vide) prend 55 min.

Calculer l'énergie E contenue dans la batterie :

a) en joules

b) en watts-heures (Wh)

Entraînement 4.2 — Voiture de série contre Formule 1.

Les voitures de course « Formule 1 » sont des véhicules hybrides : elles possèdent à la fois un moteur thermique et un moteur électrique. On souhaite comparer le moteur électrique d'une Formule 1 à celui d'une simple voiture électrique de série.

On donne les informations suivantes :

	Hyundai Ioniq 6	Formule 1
Capacité batterie	77,4 kWh	4 MJ
Puissance moteur	239 kW	160 cv
Consommation moyenne	15,1 kWh/100km	

On indique que $1 \text{ cv} = 0,735 \text{ kW}$.

a) Calculer l'autonomie en km de la batterie de la Hyundai Ioniq 6

b) Quel véhicule possède la batterie de plus grande capacité ?

c) Quel véhicule possède le moteur électrique le plus puissant ?

Entraînement 4.3 — Identification de courbes.

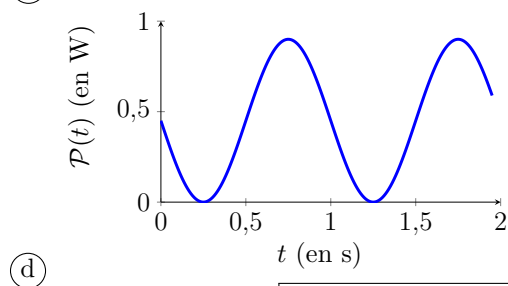
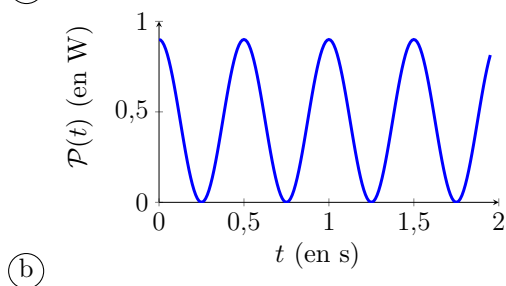
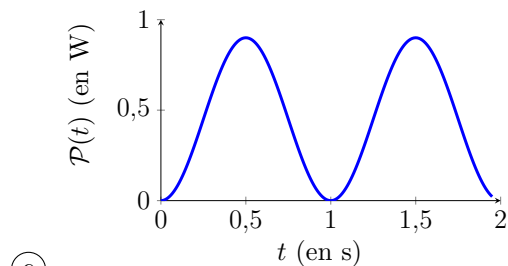
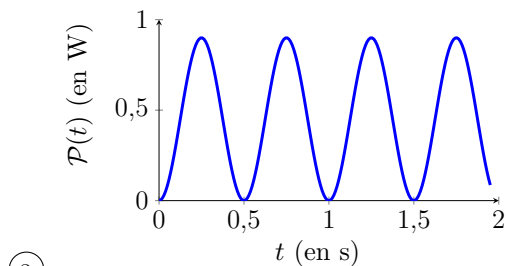
Une tension $u(t)$ est appliquée aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance $R = 10\ \Omega$.

Identifier parmi les courbes proposées celle correspondant à la puissance

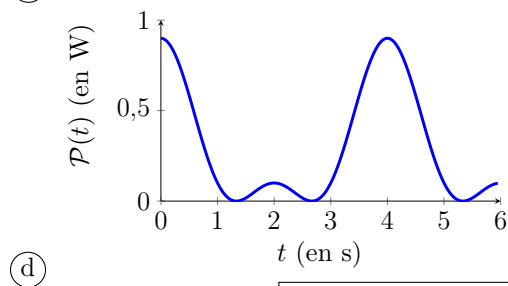
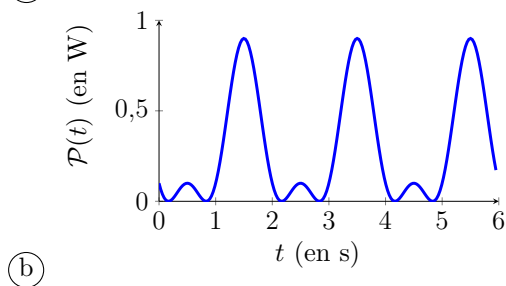
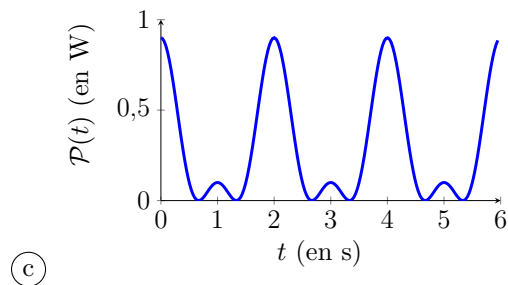
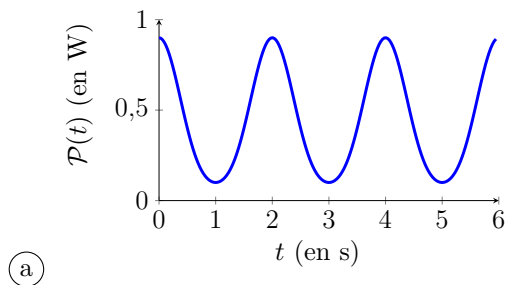
$$\mathcal{P}(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

dissipée par effet Joule dans la résistance.

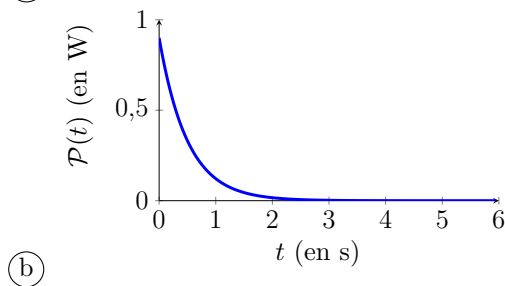
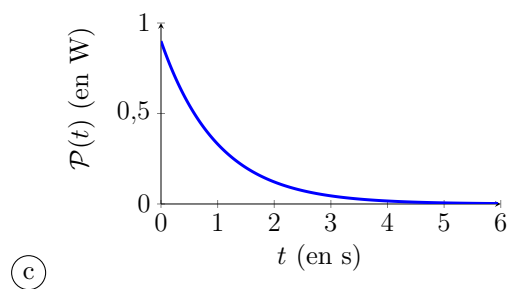
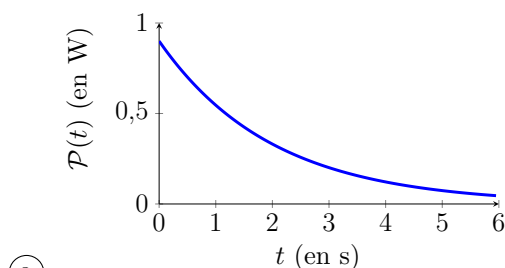
a) Pour $u(t) = 3 \sin(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



b) Pour $u(t) = 1 + 2 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



c) Pour $u(t) = 3 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = 2$ s.



.....

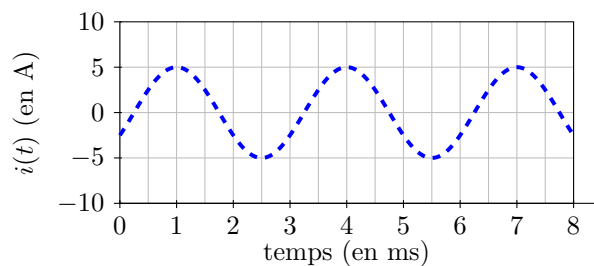
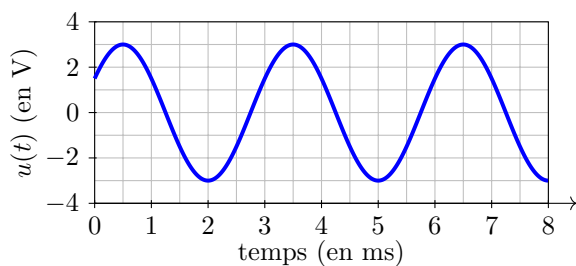
Entraînement 4.4 — Un calcul graphique.

Pour un dipôle soumis à un signal alternatif harmonique, la puissance moyenne vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{U_0 I_0}{2} \cos(\varphi),$$

où U_0 et I_0 sont respectivement l'amplitude de la tension et du courant et où φ représente la valeur du déphasage angulaire entre la tension et l'intensité du courant.

Les figures ci-dessous donnent les représentations graphiques de la tension $u(t)$ et de l'intensité $i(t)$ en convention récepteur.



Déterminer la puissance moyenne reçue par ce dipôle

Entraînement 4.5 — Des calculs de puissance.

On souhaite calculer la puissance reçue par un dipôle. Quand celui-ci est alimenté par une tension $u(t)$ et parcouru par un courant $i(t)$, la puissance moyenne reçue est donnée par la formule :

$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \times i(t) dt,$$

où T est la période du signal.

Dans un premier temps, on considère les signaux $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \psi)$ et $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \psi)$.

a) Combien vaut la période T pour ces signaux ?

b) Calculer $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ pour ces signaux.

On pourra utiliser la formule $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

Maintenant, on considère les signaux $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$ et $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

c) Calculer $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ pour ces signaux.

On pourra utiliser la formule $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

Enfin, on considère les signaux $u(t) = u_0 \times (1 + \cos(\omega t))$ et $i(t) = i_0 \times (2 + \sin(\omega t + \psi))$.

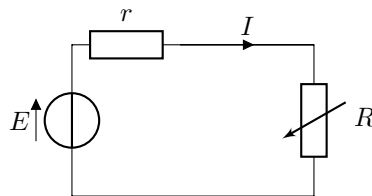
d) Calculer $\mathcal{P}_{\text{moy}}$ pour ces signaux

Régime permanent

Entraînement 4.6 — Puissance consommée.

Soit un générateur réel de f.é.m. E constante et de résistance interne r .

On branche à ses bornes un conducteur ohmique de résistance variable R .



a) Déterminer l'intensité du courant qui circule dans le circuit

b) Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ dissipée dans le conducteur ohmique en fonction de E , r et R .

.....

Entraînement 4.7 — Optimisation de puissance échangée.

Dans un certain circuit, la puissance dissipée dans un conducteur ohmique de résistance R vaut :

$$\mathcal{P} = E^2 \frac{R}{(r + R)^2},$$

où r est un paramètre.

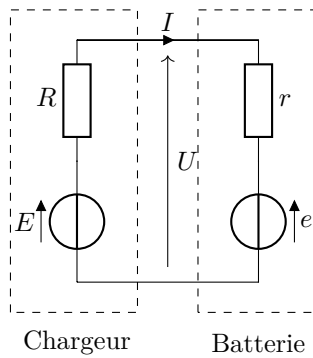
On souhaite déterminer quelle valeur de R permet d'optimiser la puissance reçue par la résistance R , étant donné les caractéristiques de la source.

- a) Calculer $\frac{d\mathcal{P}}{dR}$
- b) Trouver la valeur $R_{\max}$ pour laquelle $\mathcal{P}(R)$ est maximale :
- (a) $R_{\max} = R$ (c) $R_{\max} = R + r$ (e) $R_{\max} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{R}}$ (f) $R_{\max} = R \times e^{r/R}$
 (b) $R_{\max} = r$ (d) $R_{\max} = \frac{R^2}{r + R}$
-

Entraînement 4.8 — Charge d'une batterie.

Une batterie de voiture est déchargée. Pour recharger cette batterie, de f.é.m. $e = 12\text{ V}$ et de résistance interne $r = 0,2\Omega$, on la branche sur un chargeur de f.é.m. $E = 13\text{ V}$ et de résistance interne $R = 0,3\Omega$.

On a alors le circuit suivant :



On lit sur la batterie qu'elle a une capacité de $50\text{ A} \cdot \text{h}$ (ampères-heures).

- a) Exprimer le courant I circulant dans la batterie en fonction de E , e , R et r .

- b) Exprimer la tension U aux bornes de la batterie lors de la charge en fonction de E , e , R et r .

- c) Exprimer la puissance délivrée par la source de f.é.m. E en fonction de E , e , R et r .

- d) Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans le circuit en fonction de E , e , R et r .

e) Exprimer la puissance reçue par la batterie en fonction de E , e , R et r .

.....

Le rendement η de la charge est égal au rapport de la puissance reçue par la batterie par la puissance fournie par la source E .

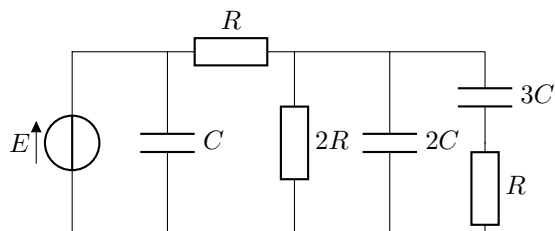
f) Déterminer l'expression du rendement η en fonction de E et e .

.....

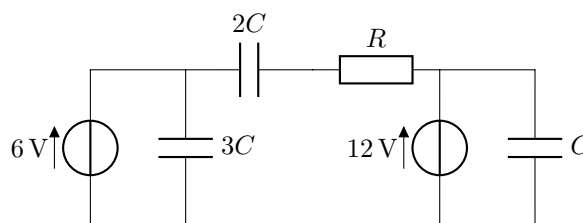
g) Calculer la valeur numérique du rendement η

Entraînement 4.9 — Énergie d'un condensateur en régime permanent.

En régime permanent, l'énergie stockée dans un condensateur de capacité C est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu^2$, où u est la tension à ses bornes.



Circuit n° 1



Circuit n° 2

a) On considère que le régime permanent est établi dans le circuit n° 1.

Dans quel condensateur l'énergie stockée est-elle la plus importante ?

- (a) C (b) $2C$ (c) $3C$

.....

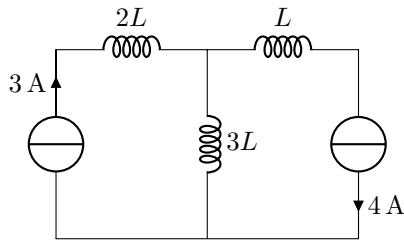
b) Même question pour le circuit n° 2.

- (a) C (b) $2C$ (c) $3C$

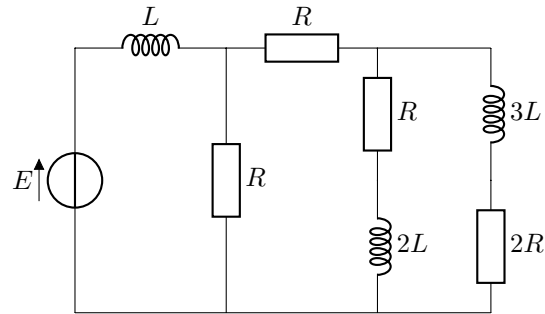
.....

Entraînement 4.10 — Énergie d'une bobine en régime permanent.

En régime permanent, l'énergie stockée dans une bobine d'inductance L est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Li^2$ où i est le courant qui la traverse.



Circuit n° 3



Circuit n° 4

a) On considère que le régime permanent est établi dans le circuit n° 3.

Dans quelle bobine l'énergie stockée est-elle la plus importante ?

- (a) L (b) $2L$ (c) $3L$

.....

b) Même question pour le circuit n° 4.

- (a) L (b) $2L$ (c) $3L$

.....

Bilans d'énergie pour des circuits soumis à des échelons de tension

Entraînement 4.11 — Charge d'un condensateur.

Soit le circuit ci-contre dans lequel le condensateur C est initialement déchargé.

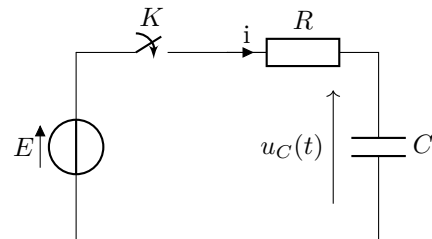
À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

Dans ces conditions, la tension aux bornes du condensateur vaut :

$$u_C(t) = E(1 - \exp(-t/\tau)),$$

avec $\tau = RC$. L'intensité dans le circuit vaut :

$$i(t) = \frac{CE}{\tau} \exp(-t/\tau).$$



Exprimer, en fonction des grandeurs introduites :

a) la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ délivrée par la source de f.é.m. E

b) la puissance instantanée $\mathcal{P}_J(t)$ dissipée par effet Joule dans le circuit

c) la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur

d) l'énergie totale $\mathcal{E}_E$ fournie par la source de tension que l'on calculera grâce à la formule :

$$\mathcal{E}_E = \int_0^\infty \mathcal{P}_E(t) dt.$$

.....

e) l'énergie totale $\mathcal{E}_J$ dissipée par effet Joule que l'on calculera grâce à la formule :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^\infty \mathcal{P}_J(t) dt.$$

.....

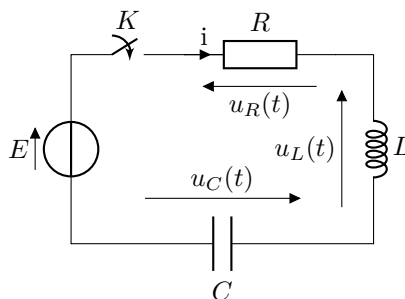
f) l'énergie totale $\mathcal{E}_C$ fournie au condensateur que l'on calculera grâce à la formule :

$$\mathcal{E}_C = \int_0^\infty \mathcal{P}_C(t) dt.$$

.....

Entraînement 4.12 — Aspects énergétiques du circuit *RLC*.

On considère le montage ci-dessous dans lequel le condensateur est initialement déchargé.



À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

À $t = 0^+$, on a $u_C(t = 0^+) = 0$ et $i(t = 0^+) = 0$.

En régime permanent, on a $u_C(t \rightarrow +\infty) = E$ et $i(t \rightarrow +\infty) = 0$.

a) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_E(t)$ fournie par la source en fonction de E et $u_C(t)$.

On pourra s'aider de la relation $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$.

.....

b) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_C(t)$ reçue par le condensateur en fonction de $u_C(t)$ et C .

.....

c) Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_L(t)$ reçue par la bobine en fonction de $i(t)$ et L .

.....

En intégrant les expressions des puissances instantanées aux bornes de chaque dipôle, exprimer en fonction des grandeurs introduites :

d) l'énergie totale fournie par la source de tension

e) l'énergie totale fournie au condensateur

f) l'énergie totale fournie à la bobine

g) En exploitant les résultats précédents, exprimer l'énergie totale dissipée par effet Joule.

.....

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Étude des circuits électriques I

Réponses

1.1	$\textcircled{b}$	1.8 b)	$\frac{R}{5}$	1.14 a)	$\frac{E}{R}$
1.2	$2,5 \cdot 10^{17}$	1.8 c)	$\frac{R}{N}$	1.14 b)	$\frac{3E}{4R}$
1.3 a)	$2i$	1.8 d)	$R \left(\frac{1-a^2}{3-a^2} \right)$	1.15 a) ..	$\frac{ER_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$
1.3 b)	i	1.9 a)	$1 \text{ k}\Omega$	1.15 b) ..	$\frac{E(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$
1.3 c)	0	1.9 b)	$1 \text{ k}\Omega$	1.15 c) ..	$\frac{-ER_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$
1.4 a)	80 mA	1.9 c)	$1 \text{ k}\Omega$	1.16 a)	2
1.4 b)	30 mA	1.10	$\frac{4R(R+R')}{2R+R'}$	1.16 b)	3
1.4 c)	-350 mA	1.11 a)	$2R$	1.17 a)	$\frac{3}{4}R$
1.5 a)	$E - U_1$	1.11 b)	R	1.17 b)	$\frac{3}{4}E$
1.5 b)	$U_1 - E$	1.11 c)	0	1.17 c)	$-\frac{E}{4}$
1.5 c)	$E - U_1$	1.12 a)	$\frac{I_0}{3}$	1.18 a)	$\frac{3E}{8R}$
1.6 a)	1 V	1.12 b)	$\frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0$	1.18 b)	$\frac{E}{4R}$
1.6 b)	-6 V	1.13 a)	$\frac{1}{4} Ri + Ri_1$	1.18 c)	$-\frac{E}{8R}$
1.6 c)	7 V	1.13 b)	$\frac{13}{4} Ri - 3Ri_1$		
1.7 a)	$-u/R$				
1.7 b)	$u/2R$				
1.7 c)	$u/3R$				
1.8 a)	$\frac{5}{6}R$				

Corrigés

1.1 Calculons le nombre d'électrons transférés pendant une seconde :

- 5 000 électrons durant 1 ms correspond à $5 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$;
- 0,2 mol d'électrons durant 1 an correspond à

$$0,2 \text{ mol} \times 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} / (365 \text{ jour} \cdot \text{an}^{-1} \times 24 \text{ h} \cdot \text{jour}^{-1} \times 3600 \text{ s} \cdot \text{h}^{-1}) = 3,8 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} ;$$

- 20 milliards d'électrons durant 1 min correspond à $\frac{20 \times 10^9 \text{ min}^{-1}}{60 \text{ min/h}^{-1}} = 3,3 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$.

Par conséquent, c'est le courant $\textcircled{b}$ qui donne la plus grande intensité.

1.2 La quantité de charge transférée vaut $q = I \times \Delta t = 4 \times 10^{-3} \text{ A} \times 10 \text{ s} = 40 \text{ mC}$. Cette quantité de charge correspond à un nombre d'électrons $N = q/e = 40 \times 10^{-3} \text{ C} / 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} = 2,5 \cdot 10^{17}$ électrons.

1.5 a) La loi des mailles donne la relation : $U + U_1 - E = 0$, soit $U = E - U_1$.

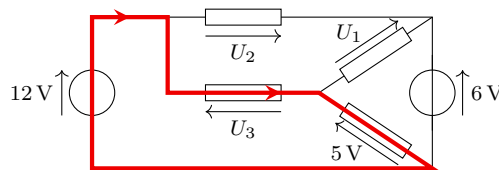
1.5 b) Les points A et C sont au même potentiel, ainsi que les points B et D. Par conséquent, la tension $U_{AB} = U_{CD} = -U_{DC} = -U$. Donc, $U_{AB} = U_1 - E$.

1.5 c) D est au même potentiel que B de sorte que $U_{DA} = U_{BA} = -U_{AB}$. On trouve donc $U_{DA} = E - U_1$.

1.6 a) Dans la maille triangulaire, on a $6 = U_1 + 5$, soit $U_1 = 1 \text{ V}$.

1.6 b) Dans la grande maille rectangulaire, la loi des mailles donne $12 + U_2 - 6 = 0$, soit $U_2 = -6 \text{ V}$.

1.6 c)



Dans la maille surlignée et parcourue dans le sens indiqué, on trouve la relation $12 - U_3 - 5 = 0$, ce qui donne $U_3 = 7 \text{ V}$.

1.7 a) La loi d'Ohm s'écrit $u = Ri$ en convention récepteur et $u = -Ri$ en convention générateur. Ici la résistance est fléchée en convention générateur. Ainsi, on trouve $i = -u/R$.

1.7 b) La loi d'Ohm donne $u = 2Ri$, soit $i = \frac{u}{2R}$.

1.7 c) La résistance est fléchée en convention générateur : on a $u = -(3R) \times (-i)$, d'où $i = \frac{u}{3R}$.

1.8 a) $R_{\text{eq}} = \frac{R}{2} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R$.

1.8 b) $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{2}{R} + \frac{3}{R} = \frac{5}{R}$, soit $R_{\text{eq}} = \frac{R}{5}$.

1.8 c) $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \underbrace{\frac{1}{R} + \dots + \frac{1}{R}}_{N \text{ fois}} = \frac{N}{R}$, d'où $R_{\text{eq}} = \frac{R}{N}$.

1.8 d) La résistance équivalente R_{eq} est telle que :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R(1+a)} + \frac{1}{R(1-a)} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a} \right) = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{2}{1-a^2} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{3-a^2}{1-a^2} \right).$$

On en déduit $R_{\text{eq}} = R \left(\frac{1-a^2}{3-a^2} \right)$.

1.9 a) En associant les deux résistances en série, on se ramène à deux résistances de $2 \text{ k}\Omega$ en parallèle, ce qui est équivalent à une résistance de $1 \text{ k}\Omega$.

1.9 b) En répétant la méthode précédente plusieurs fois, on arrive au même résultat.

1.10 La résistance équivalente du dipôle AB vaut $R_{\text{eq}} = 2R + \frac{2RR'}{2R+R'}$, soit $R_{\text{eq}} = \frac{4R(R+R')}{2R+R'}$.

1.11 a) On doit résoudre :

$$\frac{4R(R+R')}{2R+R'} = 3R \quad \text{soit} \quad 4R^2 + 4RR' = 6R^2 + 3RR' \quad \text{d'où} \quad RR' = 2R^2.$$

Comme $R \neq 0$, on obtient $R' = 2R$.

1.11 b) On doit résoudre :

$$\frac{4R(R+R')}{2R+R'} = \frac{8}{3}R \quad \text{soit} \quad 12R^2 + 12RR' = 16R^2 + 8RR' \quad \text{d'où} \quad 4RR' = 4R^2.$$

Comme $R \neq 0$, on obtient $R' = R$.

1.11 c) Résolvons l'équation :

$$\frac{4R(R+R')}{2R+R'} = 2R \quad \text{soit} \quad 4R^2 + 4RR' = 4R^2 + 2RR' \quad \text{d'où} \quad 2RR' = 0.$$

Comme $R \neq 0$, il faut nécessairement $R' = 0$.

1.12 b) Isolons I :

$$\begin{aligned} R_1 I + R_2 (I_0 + I) &= 2R_2 I_0 \\ (R_1 + R_2) I + R_2 I_0 &= 2R_2 I_0 \\ (R_1 + R_2) I &= R_2 I_0 \\ I &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0. \end{aligned}$$

1.13 a) Appliquons la loi des mailles en parcourant la maille dans le sens ABCF :

$$E - \frac{1}{4} Ri - Ri_1 = 0 \quad \text{soit} \quad E = \frac{1}{4} Ri + Ri_1.$$

1.13 b) Appliquons la loi des mailles en parcourant la maille dans le sens ABDE :

$$E - \frac{1}{4}Ri - 3R(i - i_1) = 0 \quad \text{d'où} \quad E = \frac{13}{4}Ri - 3Ri_1.$$

1.14 a) Additionnons les deux relations après avoir multiplié par 3 la première :

$$\begin{cases} 3Ri + 12Ri_1 = 12E \\ 13Ri - 12Ri_1 = 4E \end{cases} \quad \text{donnent ainsi} \quad 16Ri = 16E \quad \text{d'où} \quad i = \frac{E}{R}.$$

1.14 b) Dans la première relation, remplaçons i par E/R :

$$R \times \left(\frac{E}{R}\right) + 4Ri_1 = 4E \quad \text{donc} \quad 4Ri_1 = 3E \quad \text{d'où} \quad i_1 = \frac{3E}{4R}.$$

1.15 a) Rappelons la règle du diviseur de tension :

Dans un circuit où N conducteurs de résistances $R_1, \dots, R_N$ sont placés en série, la tension U_k qui règne aux bornes de la résistance R_k est donnée par la formule :

$$U_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} U \quad \text{avec} \quad U = \sum_{i=1}^N U_i.$$

Ici, cela donne $U_1 = E \times \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$.

1.15 b) Ici, on cherche la tension aux bornes de l'ensemble des résistances $\{R_2, R_3\}$ placées en série et donc équivalent à $R_2 + R_3$. La règle du diviseur donne alors $U_2 = E \times \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$.

1.15 c) Attention, ici il y a un piège. La loi du diviseur de tension donne $U_3 = U \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$ où U est la somme algébrique des tensions orientées dans le même sens que la tension que l'on cherche. Aussi a-t-on $U = -E$ de sorte que $U_3 = -E \times \frac{R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$.

1.16 a) La formule du diviseur de courant donne $\frac{i_1}{i} = \frac{1/(\alpha R)}{1/(\alpha R) + 1/R}$.

Par conséquent, α doit vérifier l'équation :

$$\frac{1}{1 + \alpha} = \frac{1}{3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha = 2.$$

1.16 b) On peut utiliser les formules du diviseur de courant :

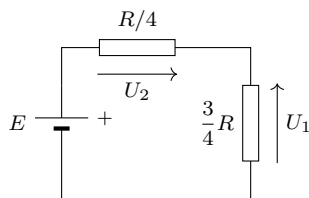
$$i_1 = i \times \frac{1/(\alpha R)}{1/(\alpha R) + 1/R} \quad \text{et} \quad i_2 = i \times \frac{1/R}{1/(\alpha R) + 1/R},$$

ce qui permet de déduire $i_2/i_1 = \alpha$. La solution est donc $\alpha = 3$.

On peut aussi tout simplement écrire la loi des mailles : $\alpha Ri_1 = Ri_2$ pour aboutir plus immédiatement au résultat.

1.17 a) L'association $(R \parallel 3R)$ est équivalente à un conducteur de résistance $R_{\text{eq}} = \frac{R \times 3R}{R + 3R} = \frac{3}{4}R$.

1.17 b) Simplifions le montage en remplaçant l'association $(R \parallel 3R)$ par un conducteur de résistance $R_{\text{eq}} = \frac{3}{4}R$.



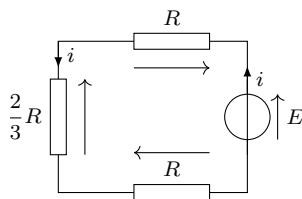
On reconnaît un diviseur de tension. La formule du diviseur donne $U_1 = E \times \frac{\frac{3}{4}R}{\frac{1}{4}R + \frac{3}{4}R} = \frac{3}{4}E$.

1.17 c) Là encore, on peut utiliser la formule du diviseur de tension en faisant attention à l'orientation :

$$-U_2 = E \times \frac{\frac{1}{4}R}{\frac{1}{4}R + \frac{3}{4}R} \quad \text{soit} \quad U_2 = -\frac{E}{4}.$$

Remarque : on peut aussi obtenir U_2 à l'aide de la loi des mailles : $E + U_2 - U_1 = 0$ avec $U_1 = \frac{3}{4}E$.

1.18 a) Remplaçons l'association $(2R \parallel R)$ par un conducteur de résistance $R_{\text{eq}} = \frac{2R \times R}{2R + R} = \frac{2}{3}R$. On obtient le circuit à une maille suivant :



La loi des mailles donne alors $E - Ri - \frac{2}{3}Ri - Ri = 0$, d'où $i = \frac{3}{8} \frac{E}{R}$.

1.18 b) La formule du diviseur donne :

$$i_1 = \frac{1/R}{1/R + 1/(2R)} \times i = \frac{2}{3}i = \frac{E}{4R}.$$

1.18 c) Le plus simple consiste à utiliser la loi des nœuds : $i + i_2 = i_1$, ce qui donne $i_2 = i_1 - i = -\frac{E}{8R}$.

On peut aussi utiliser la formule du diviseur de courant en faisant attention à l'orientation des courants :

$$-i_2 = \frac{1/(2R)}{1/R + 1/(2R)} \times i = \frac{1}{3}i = \frac{E}{8R}.$$

Fiche n° 2. Étude des circuits électriques II

Réponses

2.1	$\textcircled{b}$	2.10 b)	$\frac{E}{R}$
2.2 a)	$u = L \frac{di}{dt} + L' \frac{di}{dt}$	2.10 c)	$\frac{E}{R}$
2.2 b)	$L + L'$	2.10 d)	$\frac{E}{R}$
2.2 c)	$\frac{di}{dt} = \frac{u}{L} + \frac{u}{L'}$	2.10 e)	$\frac{E}{R}$
2.2 d)	$\frac{LL'}{L + L'}$	2.11 a)	0
2.3	L	2.11 b)	0
2.4 a)	$\frac{du}{dt} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right) i$	2.11 c)	$\frac{2E}{3R}$
2.4 b)	$\frac{CC'}{C + C'}$	2.11 d)	$\frac{1}{3}E$
2.4 c)	$i = (C + C') \frac{du}{dt}$	2.12 a)	$\frac{L}{R}$
2.4 d)	$C + C'$	2.12 b)	$\frac{RC}{2}$
2.5	$\textcircled{a}$	2.13 a)	$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$
2.6	$\frac{C}{2}$	2.13 b)	$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E$
2.7 a)	$\textcircled{c}$	2.13 c)	$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i(t) = 0$
2.7 b)	$\textcircled{a}$	2.13 d)	$i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$
2.8	$\textcircled{b}$	2.13 e)	$\frac{du}{dt} + \frac{2}{RC}u = \frac{E}{RC}$
2.9 a)	$\textcircled{c}$ et $\textcircled{d}$	2.14 a)	$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$
2.9 b)	$\textcircled{a}$ et $\textcircled{c}$	2.14 b)	$i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}$
2.9 c)	$\textcircled{b}$	2.14 c)	$u_C(t) = \frac{1}{2}E$
2.9 d)	$\textcircled{a}$, $\textcircled{c}$ et $\textcircled{d}$	2.15 a)	$\textcircled{b}$
2.9 e)	$\textcircled{a}$, $\textcircled{b}$ et $\textcircled{c}$		
2.10 a)	0		

- 2.15 b) c
- 2.15 c) a
- 2.15 d) 4 V
- 2.15 e) 4 V
- 2.15 f) 1,3 kΩ
- 2.16 a) $[\omega_0] = T^{-1}$
- 2.16 b) Q est sans dimension
- 2.16 c) $\frac{1}{\sqrt{LC}}$
- 2.16 d) $R\sqrt{\frac{C}{L}}$
- 2.17 a) $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}$
- 2.17 b) $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$
- 2.18 a) $E \times (1 - \cos(\omega_0 t))$
- 2.18 b) $\frac{E}{L\omega_0} \sin(\omega_0 t)$
- 2.19 a) b
- 2.19 b) c
- 2.19 c) b
- 2.19 d) a
- 2.19 e) $1,2 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Corrigés

2.1 L'intensité est une succession de droites. Sa dérivée est donc constante par morceaux (et non définie au niveau de la discontinuité). Si le dipôle se comportait comme une bobine, la tension devrait être constante par morceaux, ce qui n'est pas ce que l'on observe. Il ne s'agit donc pas d'une bobine.

2.2 a) En vertu de la loi d'additivité des tensions, on a $u = L \frac{di}{dt} + L' \frac{di}{dt}$.

2.2 b) On peut donc écrire $u = L_{\text{eq}} \frac{di}{dt}$ à condition de poser $L_{\text{eq}} = L + L'$.

2.2 c) En vertu de la loi des nœuds, on a $i = i_L + i_{L'}$. Après dérivation, ceci donne $\frac{di}{dt} = \frac{u}{L} + \frac{u}{L'}$.

2.2 d) On peut écrire $u = L_{\text{eq}} \frac{di}{dt}$ à condition de poser :

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L'} \quad \text{soit} \quad L_{\text{eq}} = \frac{LL'}{L + L'}.$$

2.3 On commence par regrouper les deux bobines en parallèle. On obtient alors $L_1 = \frac{L \times L}{L + L} = \frac{L}{2}$. Cette bobine se retrouve alors en série avec la première, d'où $L_{\text{eq}} = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L$.

2.4 a) En vertu de la loi d'additivité des tensions, on a $u = u_C + u_{C'}$. Après dérivation par rapport au temps, on obtient $\frac{du}{dt} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right) i$.

2.4 b) On peut donc écrire $i = C_{\text{eq}} \frac{du}{dt}$ à condition de poser :

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \quad \text{soit} \quad C_{\text{eq}} = \frac{CC'}{C + C'}.$$

2.4 c) En vertu de la loi des nœuds, on a $i = i_C + i_{C'} = (C + C') \frac{du}{dt}$.

2.4 d) On peut écrire $i = C_{\text{eq}} \frac{du}{dt}$ à condition de poser $C_{\text{eq}} = C + C'$.

2.5 Si le dipôle est un condensateur alors l'intensité est proportionnelle à la dérivée de la tension. La tension est constituée d'une droite croissante, puis d'une droite décroissante de pente opposée et enfin d'une parabole de type $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$. Si l'on dérive la tension, on obtient alors une constante positive, puis une constante opposée et enfin une droite croissante $(at + b)$. C'est bien ce que l'on observe.

Notez que la tension est continue, ce qui est le propre d'un condensateur.

2.6 On commence par regrouper les deux condensateurs en parallèle. On obtient alors $C_1 = C/2 + C/2 = C$. Ce condensateur se retrouve alors en série avec le premier, d'où $C_{\text{eq}} = \frac{C \times C}{C + C} = C/2$.

2.7 a) En régime stationnaire, on a $\frac{du_C}{dt} = 0$, d'où $i = 0$. Cela correspond à la relation constitutive de l'interrupteur ouvert, qui ne laisse pas passer le courant.

2.7 b) En régime stationnaire, on a $\frac{di}{dt} = 0$, d'où $u_L = 0$, ce qui correspond à la relation constitutive de l'interrupteur fermé.

2.8 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. L'ampoule A_1 est court-circuitée et ne brille pas. Le courant dans la branche du condensateur est nul : l'ampoule A_3 est éteinte. Reste l'ampoule A_2 dont la tension à ses bornes est E : elle brille donc.

2.9 a) La tension aux bornes du condensateur est toujours continue ; de plus, la tension d'un interrupteur fermé est nulle, donc toujours continue.

Pour affirmer que la tension aux bornes d'un condensateur est continue, il faut se placer dans un cas où il n'existe pas de courants infinis pendant une durée infiniment brève.

2.9 b) Du fait de la présence de la bobine, l'intensité i du courant électrique est une grandeur continue. Vu que $u_R = Ri$, c'est aussi le cas de la grandeur u_R .

2.9 c) Du fait de la présence du condensateur, la tension u_C est une grandeur continue. En revanche, i est discontinue : sa valeur passe de $i(0^-) = 0$ à $i(0^+) = E/R$. Par conséquent, $u_R = Ri$ est également discontinue.

2.9 d) Le courant i circulant à travers une bobine est continu. On en déduit que $u_R = Ri$ est aussi continu. De plus, la tension u_C aux bornes du condensateur est aussi continue. Seule la tension aux bornes de la bobine peut présenter une discontinuité.

2.9 e) Les courants i et i_2 sont continus car ces courants traversent une bobine. Ainsi, d'après la loi des nœuds, le courant i_1 l'est également.

La tension u est celle aux bornes du condensateur donc continue (la présence de la bobine en parallèle n'y change rien). Finalement, la tension u_L ne l'est pas car $u_L(0^-) = 0$ (régime stationnaire) et $u_L(0^+) = E$ (loi des mailles).

2.10 a) À $t = 0^-$, l'interrupteur K est ouvert donc $i(0^-) = 0$. De plus, ce courant circulant dans une bobine, il est continu, d'où finalement $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

2.10 b) La tension u_L n'est pas nécessairement une grandeur continue, il convient alors d'appliquer la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$, d'où $E = Ri(0^+) + u_L(0^+)$.

De plus, on a par continuité du courant (bobine dans la branche) $i(0^-) = i(0^+) = 0$ car K est initialement ouvert. On en déduit finalement que $u_L(0^+) = E - R \times 0 = E$.

2.10 c) Le courant i n'est pas nécessairement une grandeur continue car il n'y a pas de bobine dans la branche. On applique alors la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$, d'où $E = Ri(0^+) + u_C(0^+)$.

Or, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) puis $u_C(0^+) = 0$ car ce dernier est initialement déchargé. On en déduit finalement que $i(0^+) = E/R$.

2.10 d) La tension u_R n'est pas nécessairement continue. On applique alors la loi des mailles (maille de gauche) à l'instant $t = 0^+$, d'où $E = u_R(0^+) + u(0^+)$.

Or, la tension u est à la fois celle du résistor mais aussi celle du condensateur car ces dipôles sont placés en parallèle. On en déduit que $u(0^+) = u(0^-)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) puis $u(0^+) = 0$ car ce dernier est initialement déchargé, d'où finalement $u_R(0^+) = E$.

2.10 e) On applique la loi des nœuds à l'instant $t = 0^+$, d'où $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$.

De plus, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$ et $i(0^+) = u_R(0^+)/R = E/R$ d'après la question précédente. On en déduit finalement que $i_1(0^+) = E/R$.

2.11 a) La tension u aux bornes du condensateur est continue. De plus, on a $u(0^-) = 0$ car le condensateur est initialement déchargé. On en déduit que $u(0^+) = 0$.

2.11 b) Pour le condensateur, on a, à l'instant $t = 0^+$, $i_1(0^+) = C \frac{du}{dt}(0^+)$. Il convient alors de trouver l'expression de ce courant.

La loi des nœuds indique que $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$. Or, on a $i(0^+) = i(0^-) = 0$ par continuité du courant circulant dans la bobine, et du fait de l'ouverture de K pour $t < 0$. De plus, on a $i_2(0^+) = 2u(0^+)/R = 0$. On en déduit que $i_1(0^+) = 0$ et donc que $\frac{du}{dt}(0^+) = 0$.

2.11 c) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. La loi des mailles indique alors $E = Ri(+\infty) + \frac{R}{2}i(+\infty)$, d'où au final $i(+\infty) = \frac{2E}{3R}$. Ce résultat aurait aussi pu être obtenu à l'aide d'un schéma équivalent.

2.11 d) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. On observe alors un pont diviseur de tension formé par les deux résistors restants.

On en déduit $u(+\infty) = \frac{R/2}{R + R/2} E = \frac{1}{3} E$.

2.12 a) On écrit l'équation sous sa forme canonique : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$. Ainsi, on identifie $\tau = L/R$.

2.12 b) De la même manière, l'équation mise sous forme canonique est $\frac{du_C}{dt} + \frac{2}{RC}i = \frac{E}{RC}$, d'où $\tau = \frac{RC}{2}$.

2.13 a) Le circuit ne peut être simplifié davantage. Il convient alors d'appliquer la loi des mailles $E = Ri + L \frac{di}{dt}$ puis de mettre cette équation sous la forme canonique $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$.

2.13 b) Le circuit ne peut être simplifié davantage. Il convient alors d'appliquer la loi des mailles $E = Ri + u_C$. L'équation constitutive du condensateur indique $i = C \frac{du_C}{dt}$, d'où, en combinant avec la loi des mailles :

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

On en déduit sa forme canonique $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E$.

2.13 c) La loi des mailles indique que $E = Ri + u_C$. Cette fois-ci, il faut garder i et remplacer u_C . Cependant, la relation constitutive du condensateur fait apparaître la dérivée temporelle de cette tension.

Il convient alors de dériver l'équation obtenue à l'aide de la loi des mailles et d'écrire $R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$. Finalement, on obtient $\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC}i = 0$.

2.13 d) Le circuit comporte deux mailles indépendantes mais ne peut pas être simplifié. Il convient alors de faire particulièrement attention aux indices et variables utilisées pour les différents courants et tensions.

La loi des nœuds indique que $i = i_1 + i_2$ avec $i_2 = u/R$ et $i_1 = C \frac{du}{dt}$. On obtient alors, en combinant ces résultats, l'équation $i = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$.

2.13 e) La loi des nœuds ayant déjà été appliquée, il convient d'appliquer la loi des mailles pour la petite maille de gauche ; on en déduit $E = Ri + u$. On combine alors ce résultat avec celui de la question précédente pour obtenir que $E = u + RC \frac{du}{dt} + u$ et au final $\frac{du}{dt} + \frac{2}{RC}u = \frac{E}{RC}$.

2.14 a) Cherchons une solution particulière constante. On trouve $u_p = E$. La solution générale est donc de la forme $Ae^{-t/\tau} + E$. La condition initiale donne $u_C(0) = 0 = A + E$, soit $A = -E$. Finalement, $u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$.

2.14 b) Ici, l'équation différentielle est homogène (sans second membre). La solution est de la forme $Ae^{-t/\tau}$. La condition initiale donne $i(0) = E/R = A$. Finalement, $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$.

2.14 c) Cherchons une solution particulière constante. On trouve $u_p = \frac{1}{2}E$. La solution générale est donc de la forme $Ae^{-t/\tau} + \frac{1}{2}E$. La condition initiale donne $u(0) = \frac{1}{2}E = A + \frac{1}{2}E$, soit $A = 0$. Finalement, $u_C(t) = \frac{1}{2}E$.

2.15 d) La courbe 2, associée à l'expression de u_1 , possède une asymptote horizontale d'expression $u_1(+\infty) = E_1$. On en déduit $E_1 = 4\text{ V}$ par lecture graphique.

2.15 e) La courbe 3, associée à l'expression de u_2 , possède une valeur initiale $u_2(0^+) = \frac{1}{2}E_2$. On en déduit $E_2 = 4\text{ V}$ par lecture graphique. On peut vérifier que l'asymptote donne $u_2(+\infty) = E_2 = 4\text{ V}$.

2.15 f) La courbe 1, associée à l'expression de $i(t)$, a pour ordonnée à l'instant initial $i(0^+) = 3\text{ mA} = \frac{E_1}{R}$ donc on a $R = E_1/i(0^+) \simeq 1,3\text{ k}\Omega$.

2.16 a) On a dans le membre de gauche de l'équation d'ordre 2 : $\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = [\omega_0^2][x]$ donc $[x]T^{-2} = [\omega_0^2][x]$. Finalement, on a $[\omega_0] = T^{-1}$.

2.16 b) On a dans le membre de gauche de l'équation d'ordre 2 : $\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = \left[\frac{\omega_0}{Q}\right]\left[\frac{dx}{dt}\right]$ donc $[x]T^{-2} = T^{-1}\frac{[x]}{[Q]T}$. Finalement, on a $[Q] = 1$; donc, Q est sans dimension.

2.17 a) La loi des mailles indique que $E = Ri + u + L\frac{di}{dt}$. De plus, la relation constitutive du condensateur donne que $i = C\frac{du}{dt}$. On en déduit que :

$$E = RC\frac{du}{dt} + u + LC\frac{d^2u}{dt^2} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{E}{LC}.$$

2.17 b) La loi des nœuds donne $i = i_1 + i_2$. Cependant, la relation constitutive de la bobine fait intervenir $\frac{di_2}{dt}$. On dérive alors la loi des nœuds puis on la combine avec les relations constitutives des deux dipôles de droite pour obtenir $\frac{di}{dt} = C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u}{L}$.

La loi des mailles (petite maille de gauche) indique ensuite que $E = Ri + u$. On dérive cette relation pour faire apparaître la dérivée temporelle du courant puis on combine avec l'expression de cette dernière. D'où :

$$0 = RC\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}u + \frac{du}{dt}.$$

On en déduit finalement son expression canonique $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$.

2.18 a) Cherchons une solution particulière constante (comme le second membre). On trouve $u_p = E$. La solution générale est de la forme $A\cos(\omega_0 t + \varphi) + E$. Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} u_C(0) &= A\cos(\varphi) + E = 0 \\ \frac{du_C}{dt}(0) &= -A\omega_0\sin(\varphi) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = -E. \end{cases}$$

On en déduit que $u_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$.

2.18 b) La solution est de la forme $A \cos(\omega_0 t + \varphi) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$. Appliquons les conditions initiales :

$$\begin{cases} i(0) &= a = 0 \\ \frac{di}{dt}(0) &= b\omega_0 = \frac{E}{L} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{E}{L\omega_0}. \end{cases}$$

On en déduit que $i(t) = \frac{E}{L\omega_0} \sin(\omega_0 t)$.

2.19 a) Le facteur de qualité est inférieur à $1/2$ pour la courbe 3. De plus, il est sensiblement égal au nombre d'oscillations observables dans le cas du régime pseudo-périodique. On observe environ dix oscillations pour la courbe 2 et six pour la courbe 1. La courbe 2 possède donc le facteur de qualité le plus grand.

2.19 b) La fonction $u_1(t)$ ne contient pas de grandeurs circulaires ($\cos(\omega t)$ ou $\sin(\omega t)$) et évolue de $u_1(0) = a - b$ vers $u_1(+\infty) = 0$. Cela correspond à la courbe 3.

2.19 c) La tension $u_2(t)$ présente des oscillations amorties et tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Seule la courbe 2 vérifie ces propriétés.

2.19 d) On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_3(t) = E$. Seule la courbe 1 présente une asymptote horizontale d'ordonnée non nulle.

2.19 e) On détermine la pseudo-période T en mesurant la durée correspondant à 10 oscillations : $10T \simeq 52 \text{ ms}$ d'où $T \simeq 5,2 \text{ ms}$. On en déduit $\Omega = 2\pi/T \simeq 1,2 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Fiche n° 3. Étude des filtres

Réponses

- 3.1 a) $\sqrt{a^2 + b^2}$
- 3.1 b) b/a
- 3.1 c) (e)
- 3.1 d) (f)
- 3.2 a) R
- 3.2 b) 0
- 3.2 c) $L\omega$
- 3.2 d) $\pi/2$
- 3.2 e) $\frac{1}{C\omega}$
- 3.2 f) $-\pi/2$
- 3.3 a) $R + \frac{1}{jC\omega}$
- 3.3 b) $\frac{RjL\omega}{R + jL\omega}$
- 3.3 c) $\frac{RjL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$
- 3.3 d) $\frac{R(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$
- 3.4 (a)
- 3.5 a) 10 kHz
- 3.5 b) $2,5 \text{ V}$
- 3.6 (d)
- 3.7 a) (c)
- 3.7 b) (a)
- 3.7 c) (d)
- 3.7 d) (b)

- 3.8 a) $\frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3jRC\omega} + \frac{jRC\omega}{3}}$
- 3.8 b) $1/3$
- 3.8 c) $1/3$
- 3.8 d) $2,1 \times 10^4 \text{ rad/s}$
- 3.9 a) $i_1 + i_2$
- 3.9 b) $\underline{u}(2 + jRC\omega) - \underline{u}_s$
- 3.9 c) $\frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$
- 3.9 d) 1
- 3.9 e) $\frac{1}{RC}$
- 3.9 f) $1/3$
- 3.10 a) $9,5 \text{ dB}$
- 3.10 b) $20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
- 3.10 c) $10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$
- 3.10 d) $10 \log\left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- 3.10 e) $20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$
- 3.10 f) $20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$
- 3.11 a) 0
- 3.11 b) $\pi/2$
- 3.11 c) $\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$

3.11 d)	$-\arctan\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)$	3.13 b)	$1/\sqrt{2}$
3.11 e)	$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$	3.13 c)	$1/4$
3.11 f)	$\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$	3.14 a)	$-28,0 \text{ dB}$
3.12 a)	$\pi/4$	3.14 b)	$-17,1 \text{ dB}$
3.12 b)	0	3.14 c)	$-8,0 \text{ dB}$
3.12 c)	$\frac{\pi}{2}$	3.14 d)	$+20 \text{ dB/décade}$
3.13 a)	1	3.15 a)	$15,0 \text{ kHz}$
		3.15 b)	$11,7 \text{ kHz}$
		3.15 c)	$19,2 \text{ kHz}$

Corrigés

3.1 a) En multipliant les deux expressions de $\underline{Z}$ par leur conjugué complexe, on obtient :

$$\underline{Z} \times \underline{Z}^* = (a + jb)(a - jb) = Z_0^2 (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))(\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)).$$

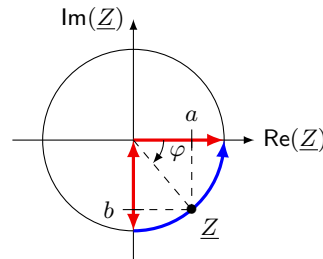
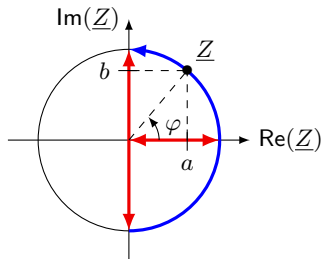
Après calcul, cette relation se réduit à $a^2 + b^2 = Z_0^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$. Ainsi, on a $Z_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3.1 b) En égalant les parties réelles et imaginaires des deux expressions de $\underline{Z}$, on obtient :

$$a = Z_0 \cos(\varphi) \quad \text{et} \quad b = Z_0 \sin(\varphi).$$

Ainsi, on a $\cos(\varphi) = \frac{a}{Z_0}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{Z_0}$. Puis, $\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{b}{Z_0} \frac{Z_0}{a}$. Donc, on a $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$.

3.1 c) On utilise une représentation géométrique du nombre complexe $\underline{Z}$. Les axes des abscisses et des ordonnées du plan complexe correspondent respectivement à la partie réelle et à la partie imaginaire de $\underline{Z}$. L'argument φ est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite passant par le centre du cercle et $\underline{Z}$.



On constate que si $a \geq 0$ alors φ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

De la même manière, on constate que si $a > 0$ et $b \leq 0$ alors φ est compris entre $-\pi/2$ exclu ($a > 0$) et 0 inclus.

3.2 a) On a $Z_0 = \sqrt{R^2 + 0} = R$.

3.2 b) On a $\tan(\varphi) = \frac{0}{R} = 0$. Donc, $\varphi = \arctan\left(\frac{0}{R}\right) = 0$.

3.2 c) On a $Z_0 = \sqrt{0 + (L\omega)^2} = L\omega$.

3.2 d) On a $\tan(\varphi) = \frac{L\omega}{0} \rightarrow +\infty$. Donc, $\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$.

3.2 e) On a $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega}$. Donc, $Z_0 = \sqrt{0 + \left(-\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \frac{1}{C\omega}$.

3.2 f) On a $\tan(\varphi) = -\frac{1}{C\omega} \frac{1}{0} \rightarrow -\infty$. Donc, $\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{C\omega} \frac{1}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

3.3 a) On a $\underline{Z}_{AB} = R + \frac{1}{jC\omega}$.

3.3 b) Les deux dipôles sont associés en parallèle, nous devons sommer les admittances :

$$\underline{Y}_{AB} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} = \frac{R + jL\omega}{RjL\omega}.$$

Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{AB} = \frac{RjL\omega}{R + jL\omega}$.

3.3 c) Les trois dipôles sont associés en parallèle, nous devons sommer leurs admittances :

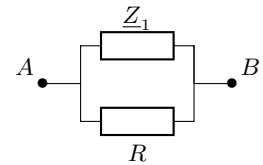
$$\underline{Y}_{AB} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{R + jL\omega - RLC\omega^2}{RjL\omega}.$$

Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{AB} = \frac{RjL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$.

3.3 d) On commence par considérer un circuit équivalent au circuit donné.

Le circuit donné est équivalent au schéma ci-contre, où on a :

$$\underline{Z}_1 = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}.$$



L'admittance du dipôle est donc :

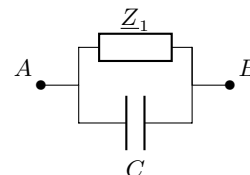
$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{R + \underline{Z}_1}{R \times \underline{Z}_1} = \left(R + \frac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}\right) \frac{1}{R \frac{1 - LC\omega^2}{jC\omega}} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R(1 - LC\omega^2)}.$$

Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{AB} = \frac{R(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$.

3.4 On commence par considérer un circuit équivalent au circuit donné.

C'est le circuit ci-contre, avec $\underline{Z}_1 = R + jL\omega$. Ainsi, l'admittance équivalente est :

$$\underline{Y}_{AB} = jC\omega + \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{jC\omega \times \underline{Z}_1 + 1}{\underline{Z}_1} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}.$$



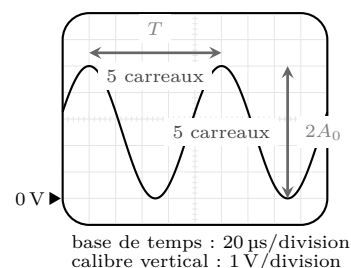
Nous en déduisons alors l'expression de l'impédance complexe du dipôle AB : $\underline{Z}_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$.

3.5 a)

La période du signal est sur 5 carreaux. La base de temps indique $20 \mu\text{s}/\text{division}$.

$$T = 5 \times 20 \times 10^{-6} \text{ s} \quad \text{soit} \quad T = 1 \times 10^{-4} \mu\text{s}.$$

La fréquence du signal observé est donc $f_0 = \frac{1}{T} = 10 \text{ kHz}$.



3.5 b) Nous avons 5 carreaux pour la double amplitude, soit $2U_0 = 5 \times 1 = 5 \text{ V}$. Donc, on a $U_0 = 2,5 \text{ V}$.

3.7 a) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 1 kHz, 3 kHz et 5 kHz. Les spectres (a) et (d) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_1(t)$ est nulle. Le spectre (c) est donc à associer à $s_1(t)$.

3.7 b) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 2 kHz, 4 kHz et 6 kHz. Les spectres (b) et (c) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_2(t)$ est égale à 1 V. Le spectre (a) est donc à associer à $s_2(t)$.

3.7 c) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 2 kHz, 4 kHz et 6 kHz. Les spectres (b) et (c) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_3(t)$ est nulle. Le spectre (d) est donc à associer à $s_3(t)$.

3.7 d) Nous notons la somme de 3 fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 1 kHz, 3 kHz et 5 kHz. Les spectres (a) et (d) ne peuvent pas convenir.

De plus, la valeur moyenne de $s_4(t)$ est égale à 1 V. Le spectre (b) est donc à associer à $s_4(t)$.

3.8 a) À l'aide d'un pont diviseur de tension, on constate que $\underline{u}_s = \underline{u}_e \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega}} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \frac{1 + jRC\omega}{3R + jR^2C\omega + \frac{1}{jC\omega}} \\ &= \frac{R}{3R + j\left(R^2C\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + j\frac{1}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}. \end{aligned}$$

3.8 b) Par identification dans l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ trouvée précédemment avec la forme canonique, nous en déduisons que $H_0 = \frac{1}{3}$.

3.8 c) Par identification dans l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ trouvée précédemment avec la forme canonique, nous en déduisons que $Q = \frac{1}{3}$.

3.8 d) Par identification de l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ trouvée précédemment avec la forme canonique, nous en déduisons que $x = RC\omega$ donc que $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. L'application numérique donne :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{1 \times 10^3 \Omega \times 47 \times 10^{-9} \text{ F}} = 2,1 \times 10^4 \text{ rad/s.}$$

3.9 a) D'après la loi des nœuds, on a $\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2$.

3.9 b) En multipliant la réponse précédente par la résistance R , on obtient $R\underline{i} = R\underline{i}_1 + R\underline{i}_2$.

Ainsi, d'après les trois égalités, on a :

$$\underline{u}_e - \underline{u} = \underline{u} - \underline{u}_s + jRC\omega \underline{u} \quad \text{donc} \quad \underline{u}_e = \underline{u}(2 + jRC\omega) - \underline{u}_s.$$

3.9 c) En utilisant la réponse précédente et en exprimant $\underline{u}$ à partir de la relation donnée, il vient que :

$$\underline{u}_e = \underline{u}_s(1 + jRC\omega)(2 + jRC\omega) - \underline{u}_s = \underline{u}_s(1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2).$$

Ainsi, on a $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2}$.

3.9 d) En comparant les deux égalités suivantes :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \quad \text{et} \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2},$$

on trouve $H_0 = 1$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega$ donc $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$.

3.10 a) On a $G_{dB1} = 20 \log(\|3\|) = 20 \log(3) = 9,5 \text{ dB}$.

3.10 b) On a $G_{dB2} = 20 \log\left(\left|j\frac{\omega}{\omega_0}\right|\right) = 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$.

3.10 c) On calcule :

$$\begin{aligned} G_{dB3} &= 20 \log\left(\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right|\right) = 20 \log\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\right) = 20 \log\left(\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 20 \times \frac{1}{2} \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) = 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

3.10 d) On a :

$$G_{dB_4} = 20 \log(|\underline{H}_1 - \underline{H}_2|) = 20 \log\left(\left|3 - j \frac{\omega}{\omega_0}\right|\right) = 20 \log\left(\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = 10 \log\left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

3.10 e) On calcule :

$$\begin{aligned} G_{dB_5} &= 20 \log\left(\left|\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}\right|\right) = 20 \log\left(\frac{|\underline{H}_2|}{|\underline{H}_3|}\right) = 20 \log(|\underline{H}_2|) - 20 \log(|\underline{H}_3|) = G_{dB_2} - G_{dB_3} \\ &= 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

3.10 f) On calcule :

$$\begin{aligned} G_{dB_6} &= 20 \log(|\underline{H}_2 \times \underline{H}_3|) = 20 \log(|\underline{H}_2| \times |\underline{H}_3|) = 20 \log(|\underline{H}_2|) + 20 \log(|\underline{H}_3|) = G_{dB_2} + G_{dB_3} \\ &= 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

3.11 a) On a $\varphi_1 = \arg(\underline{H}_1) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H}_1)}{\text{Re}(\underline{H}_1)}\right) = \arctan\left(\frac{0}{3}\right) = \arctan(0) = 0$.

3.11 b) On a $\varphi_2 = \arg(\underline{H}_2) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H}_2)}{\text{Re}(\underline{H}_2)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

3.11 c) On a $\varphi_3 = \arg(\underline{H}_3) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(\underline{H}_3)}{\text{Re}(\underline{H}_3)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_1}}{1}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$.

3.11 d) On a $\varphi_4 = \arg(\underline{H}_1 - \underline{H}_2) = \arg\left(3 - j \frac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{3}\right) = \arctan\left(-\frac{\omega}{3\omega_0}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{3\omega_0}\right)$.

3.11 e) On a $\varphi_5 = \arg\left(\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}\right) = \arg(\underline{H}_2) - \arg(\underline{H}_3) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$.

3.11 f) On a $\varphi_6 = \arg(\underline{H}_2 \times \underline{H}_3) = \arg(\underline{H}_2) + \arg(\underline{H}_3) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$.

3.12 a) Notons que $x = \frac{\omega}{\omega_0} > 0$. Ainsi, on a :

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{jx}{1+jx}\right) = \arg(jx) - \arg(1+jx) = \arctan\left(\frac{x}{0}\right) - \arctan\left(\frac{x}{1}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Pour $x = 1$, on obtient $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

3.12 b) On a vu plus haut que $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$; ainsi, pour $\omega \gg \omega_0$, c'est-à-dire pour $x \rightarrow +\infty$, il vient que :

$$\varphi = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

3.12 c) On a vu plus haut que $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$; ainsi, pour $\omega \ll \omega_0$, c'est-à-dire pour $x \rightarrow 0$, il vient que :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

3.13 a) Pour $x = 1$, $\underline{H}(jx) = \frac{1-j}{1+j}$, donc $G(x) = \left| \frac{1-j}{1+j} \right| = \frac{|1-j|}{|1+j|} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+1}} = 1$.

3.13 b) Pour $x = 1$, $\underline{H}(jx) = -\frac{j}{1+j}$, donc $G(x) = \left| -\frac{j}{1+j} \right| = \frac{|j|}{|1+j|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.13 c) Pour $x = 1$ et $m = 2$, $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1+4j+(j)^2} = \frac{1}{4j}$, donc $G(x) = \left| \frac{1}{4j} \right| = \frac{|1|}{|4j|} = \frac{1}{4}$.

3.14 a) On a $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{0,04}{1}\right) = -28,0 \text{ dB}$.

3.14 b) On a $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{0,14}{1}\right) = -17,1 \text{ dB}$.

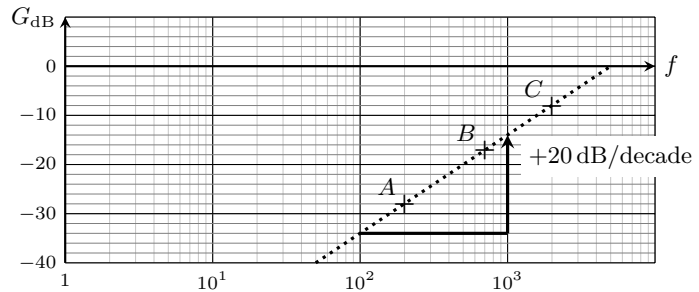
3.14 c) On a $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{0,4}{1}\right) = -8,0 \text{ dB}$.

3.14 d) En faisant l'application numérique, on trouve que la pente a de la droite vaut :

$$a = \frac{G_{dB}(C) - G_{dB}(A)}{\log(f(C)) - \log(f(A))} = \frac{-8,0 \text{ dB} + 28,0 \text{ dB}}{\log(2000) - \log(200)} = 20 \text{ dB}.$$

Donc, le gain du filtre augmente de 20 dB lorsque $\log(f)$ augmente d'une unité, soit lorsque la fréquence f est multipliée par 10, soit lorsque f augmente d'une décade.

La pente de la droite (AC) observée sur le graphe est bien de +20 dB/décade.



3.15 a) Nous observons un maximum pour $x = 1$. Nous en déduisons que $f_r = f_0 = 15,0 \text{ kHz}$.

3.15 b) La courbe de gain est maximale pour $x = 1$. Nous pouvons relever $G_{dB \text{ max}} = -2 \text{ dB}$.

Aux fréquences de coupures, le gain doit vérifier $G_{dB}(x_c) = G_{dB \text{ max}} - 3 \text{ dB} = -5 \text{ dB}$.

La première valeur de x_c collectée sur le graphique est $x_{c1} = 0,78$, elle correspond à une fréquence de coupure $f_{c1} = 0,78 \times f_0 = 11,7 \text{ kHz}$.

3.15 c) La seconde valeur de x_c collectée sur le graphique est $x_{c2} = 1,28$, elle correspond à une fréquence de coupure $f_{c2} = 1,28 \times f_0 = 19,2 \text{ kHz}$.

Fiche n° 4. Énergie et puissance électriques

Réponses

4.1 a)	16,5 kJ	4.8 d)	$\frac{(E - e)^2}{R + r}$
4.1 b)	4,6 Wh	4.8 e)	$e \frac{E - e}{R + r}$
4.2 a)	513 km	4.8 f)	$\frac{e}{E}$
4.2 b)	Hyundai Ioniq 6	4.8 g)	92 %
4.2 c)	Hyundai Ioniq 6	4.9 a)	(c)
4.3 a)	(a)	4.9 b)	(a)
4.3 b)	(c)	4.10 a)	(b)
4.3 c)	(c)	4.10 b)	(a)
4.4	3,75 W	4.11 a)	$\frac{CE^2}{\tau} \exp(-t/\tau)$
4.5 a)	$\frac{2\pi}{\omega}$	4.11 b)	$\frac{CE^2}{\tau} \exp(-2t/\tau)$
4.5 b)	$\frac{u_0 i_0}{2}$	4.11 c)	$\frac{CE^2}{\tau} (\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau))$
4.5 c)	$\frac{u_0 i_0}{2} \cos(\varphi)$	4.11 d)	CE^2
4.5 d)	$u_0 i_0 \left(2 + \frac{1}{2} \sin(\psi)\right)$	4.11 e)	$\frac{1}{2} CE^2$
4.6 a)	$\frac{E}{r + R}$	4.11 f)	$\frac{1}{2} CE^2$
4.6 b)	$E^2 \frac{R}{(r + R)^2}$	4.12 a)	$EC \frac{du_C}{dt}$
4.7 a)	$E^2 \frac{r - R}{(r + R)^3}$	4.12 b)	$\frac{d(\frac{1}{2} C u_C^2(t))}{dt}$
4.7 b)	(b)	4.12 c)	$\frac{d(\frac{1}{2} L i^2(t))}{dt}$
4.8 a)	$\frac{E - e}{R + r}$	4.12 d)	CE^2
4.8 b)	$\frac{eR + Er}{R + r}$	4.12 e)	$\frac{1}{2} CE^2$
4.8 c)	$E \frac{E - e}{R + r}$		

4.12 f) 0

4.12 g) $\frac{1}{2}CE^2$

Corrigés

4.1 a) L'énergie contenue dans la batterie vaut $E = P\Delta t$ où $P = 5 \text{ W}$ et $\Delta t = 55 \text{ min} = 55 \times 60 \text{ s} = 3\,300 \text{ s}$. L'énergie vaut donc $E = 5 \times 3\,300 \text{ J} = 16,5 \text{ kJ}$.

4.1 b) L'énergie contenue dans la batterie vaut $E = 16,5 \text{ kJ}$. Par ailleurs, $e = 1 \text{ Wh}$ est l'énergie consommée à une puissance de 1 W pendant 1 h , soit $e = 1 \text{ W} \times 3\,600 \text{ s} = 3,6 \text{ kJ}$.

On a donc $E = \frac{16,5 \text{ kJ}}{3,6 \text{ kJ}} \times 1 \text{ Wh} = 4,6 \text{ Wh}$.

4.2 a) L'énergie contenue dans la batterie vaut $E = 77,4 \text{ kWh}$.

La consommation moyenne valant $C = 15,1 \text{ kWh}/100 \text{ km}$, l'autonomie en kilomètres vaut :

$$\frac{E}{C} = \frac{77,4 \text{ kWh}}{15,1 \text{ kWh}/100 \text{ km}} = 513 \text{ km}.$$

4.2 b) En reprenant le calcul de la question précédente, $e = 1 \text{ W/h} = 3,6 \text{ kJ}$, donc l'énergie totale stockée dans les batteries des voitures de série vaut, en joules, $E = 77,4 \times 10^3 \times 3,6 \times 10^3 \text{ J} = 279 \text{ MJ}$. C'est donc la voiture de série qui possède la batterie de plus grande capacité.

4.2 c) La puissance en cv du moteur de la voiture électrique de série vaut $\mathcal{P} = 239/0,735 \text{ cv} = 325 \text{ cv}$.

4.3 a) La puissance reçue par la résistance s'écrit $\mathcal{P} = \frac{u^2}{R}$. Ici, on a donc

$$\mathcal{P} = \frac{9}{10} \sin^2(\omega t) = \frac{9}{20} (1 - \cos(2\omega t)).$$

La puissance a donc une valeur moyenne de $\frac{9}{20}$, une valeur maximale de $\frac{9}{10}$ et une période $T = 0,5 \text{ s}$.

C'est la réponse **(a)** qui est la bonne.

4.3 b) Commençons par linéariser l'expression de la puissance. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= \frac{u^2}{R} = \frac{1}{10} (1 + 2\cos(\omega t))^2 = \frac{1}{10} (1 + 4\cos^2(\omega t) + 4\cos(\omega t)) \\ &= \frac{1}{10} (3 + 2\cos(2\omega t) + 4\cos(\omega t)). \end{aligned}$$

On constate que la puissance est maximale à $t = 0$. De plus, la composante fondamentale de ce signal est de période égale à $T_{\text{fondamental}} = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \text{ s}$. Finalement, comme $u(t)$ s'annule (par exemple en $\omega t = \frac{\pi}{3}$), la puissance s'annule aussi.

Il n'y a qu'une courbe qui vérifie ces conditions : c'est la **(c)** qui est la bonne.

4.3 c) La puissance a pour expression $\mathcal{P} = \frac{u^2}{R} = \frac{9}{10} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$. On a donc :

$$\frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = -\frac{2}{\tau} \frac{9}{10} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \quad \text{donc} \quad \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt}(t=0) = -\frac{2}{\tau} \frac{9}{10} = -\frac{9}{10} \text{W} \cdot \text{s}^{-1}.$$

En exploitant la pente à l'origine, on trouve que c'est la réponse **(c)** qui est la bonne.

4.4 On lit graphiquement une période de $T = 3 \text{ ms}$ et un décalage temporel $\Delta t = 0,5 \text{ ms}$ entre les deux signaux. Le déphasage est donc $\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$. Donc, $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$.

Les amplitudes de la tension et de l'intensité sont respectivement $U_0 = 3 \text{ V}$ et $I_0 = 5 \text{ A}$. La puissance moyenne vaut donc $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} 3 \text{ V} \times 5 \text{ A} \times \frac{1}{2} = 3,75 \text{ W}$.

4.5 b) On a $\mathcal{P}(t) = u_0 i_0 \cos^2(\omega t + \psi) = \frac{u_0 i_0}{2} (1 + \cos(2\omega t + 2\psi))$.

On intègre :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{moy}} &= \frac{1}{T} \times \frac{u_0 i_0}{2} \int_0^T (1 + \cos(2\omega t + 2\psi)) dt \\ &= \frac{1}{T} \times \frac{u_0 i_0}{2} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\psi) \right]_0^T = \frac{u_0 i_0}{2}. \end{aligned}$$

On peut retenir la propriété $\langle \cos^2(\omega t + \psi) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \psi) \rangle = \frac{1}{2}$.

4.5 c) On a $\mathcal{P}(t) = u_0 i_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{u_0 i_0}{2} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]$.

On vérifie ensuite que :

$$\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2\omega T} \left[\sin(2\omega t + \varphi) \right]_0^T = 0.$$

Donc, on a $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \frac{u_0 i_0}{2} \cos(\varphi)$.

4.5 d) La puissance peut se décomposer en plusieurs termes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t) &= u_0 i_0 (1 + \cos(\omega t))(2 + \sin(\omega t + \psi)) \\ &= u_0 i_0 (2 + 2 \cos(\omega t) + \sin(\omega t + \psi) + \cos(\omega t) \sin(\omega t + \psi)) \\ &= u_0 i_0 \left(2 + 2 \cos(\omega t) + \sin(\omega t + \psi) + \cos(\omega t) \cos\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) \right).\end{aligned}$$

On peut alors séparer les calculs de valeurs moyennes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\text{moy}} &= u_0 i_0 \left(2 + 2 \langle \cos(\omega t) \rangle + \langle \sin(\omega t + \psi) \rangle + \left\langle \cos(\omega t) \cos\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) \right\rangle \right) \\ &= u_0 i_0 \left(2 + \frac{1}{2} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= u_0 i_0 \left(2 + \frac{1}{2} \sin(\psi) \right).\end{aligned}$$

4.6 a) La loi des mailles permet d'écrire $E = u_r + u_R = rI + RI = (r + R)I$. On a donc $I = \frac{E}{r + R}$.

4.6 b) La puissance dissipée dans le conducteur ohmique de résistance R vaut $\mathcal{P} = u_R I = RI^2 = E^2 \frac{R}{(r + R)^2}$.

4.7 a) Il faut dériver la fonction $\mathcal{P}(R)$. On calcule :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = E^2 \frac{1 \times (r + R)^2 - R \times 2(r + R)}{(r + R)^4} = E^2 (r + R) \frac{(r + R) - 2R}{(r + R)^4},$$

soit finalement :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = E^2 (r + R) \frac{r - R}{(r + R)^4} = E^2 \frac{r - R}{(r + R)^3}.$$

4.7 b) Il faut annuler la dérivée pour trouver l'extremum de $\mathcal{P}(R)$. Comme $\mathcal{P}(R)$ est positive et vaut 0 en $R = 0$ et en $R \rightarrow \infty$, alors cet extremum est un maximum. On a alors, par annulation du numérateur $R_{\max} = r$.

4.8 a) On applique la loi des mailles $E - U_R - u_r - e = 0$. On a donc $E - e = (R + r)I$, et donc $I = \frac{E - e}{R + r}$.

4.8 b) La batterie est en convention récepteur ; donc, on a :

$$U = e + rI = e + r \frac{E - e}{R + r} = \frac{eR + er + rE - re}{R + r} = \frac{eR + Er}{R + r}.$$

4.8 c) La puissance fournie par le chargeur vaut $\mathcal{P} = EI = E \frac{E - e}{R + r}$.

4.8 d) La puissance est dissipée par effet Joule dans les deux conducteurs ohmiques, elle vaut donc :

$$\mathcal{P}_J = RI^2 + rI^2 = (R + r) \left(\frac{E - e}{R + r} \right)^2 = \frac{(E - e)^2}{R + r}.$$

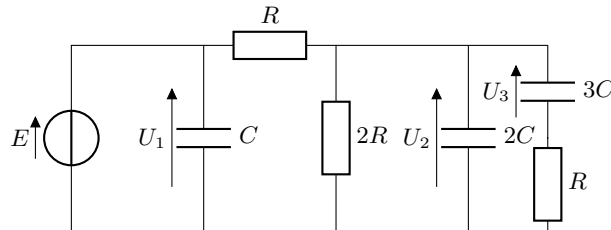
4.8 e) La puissance reçue par la batterie vaut $\mathcal{P} = eI = e \frac{E - e}{R + r}$ car elle est en convention récepteur.

4.8 f) En suivant la définition de l'énoncé, on trouve :

$$\eta = \frac{e \frac{E - e}{R + r}}{E \frac{E - e}{R + r}} = \frac{e}{E}.$$

4.8 g) Numériquement, on calcule $\eta = 12/13 = 92\%$.

4.9 a) On fait le schéma :



En régime permanent, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts :

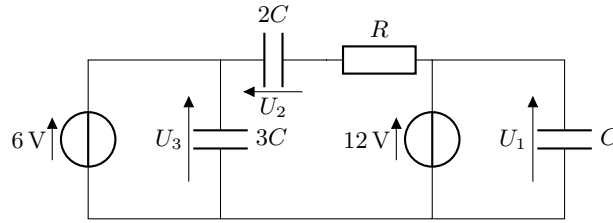
$$U_1 = E \quad \text{et} \quad U_2 = U_3 = \frac{2}{3}E.$$

Les énergies stockées dans les condensateurs sont alors :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}CE^2, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{4}{9}CE^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3 = \frac{3}{2}C\left(\frac{4}{9}E^2\right) = \frac{2}{3}CE^2.$$

On a alors $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_3$. C'est la réponse (c) qui est la bonne.

4.9 b) On fait le schéma :



En régime permanent, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts :

$$U_1 = 12 \text{ V}, \quad U_2 = -6 \text{ V} \quad \text{et} \quad U_3 = 6 \text{ V}.$$

Les énergies stockées dans les condensateurs sont alors :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}C(12)^2 = 72C, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \times 2C(6)^2 = 36C \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{2} \times 3C(6)^2 = 54C.$$

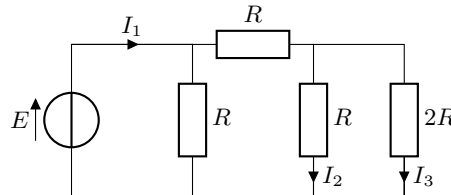
On a alors $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_2$. C'est la réponse (a) qui est la bonne.

4.10 a) Les énergies stockées dans les différentes bobines sont :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}L(4)^2 = 8L, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \times 2L(3)^2 = 9L \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{2} \times 3L(1)^2 = \frac{3}{2}L.$$

Donc, on a $\mathcal{E}_3 < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$. C'est la réponse (b) qui est la bonne.

4.10 b) Les bobines se comportent comme des fils en régime permanent. Le montage se simplifie alors :



En calculant les résistances équivalentes, on peut déterminer les valeurs des courants :

$$I_1 = \frac{8E}{5R}, \quad I_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{3E}{5R} \right) = \frac{2E}{5R} \quad \text{et} \quad I_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{3E}{5R} \right) = \frac{E}{5R}.$$

Ainsi, les énergies stockées dans les bobines sont :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}L \left(\frac{8E}{5R} \right)^2 = \frac{32}{25} \frac{LE^2}{R^2}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \times 2L \left(\frac{2E}{5R} \right)^2 = \frac{4}{25} \frac{LE^2}{R^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{2} \times 3L \left(\frac{E}{5R} \right)^2 = \frac{3}{50} \frac{LE^2}{R^2}.$$

On a $\mathcal{E}_3 < \mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$: c'est la réponse (a) qui est la bonne.

4.11 a) La puissance instantanée délivrée par la source vaut :

$$\mathcal{P}_E(t) = Ei(t) = E \times \frac{CE}{\tau} \exp(-t/\tau) = \frac{CE^2}{\tau} \exp(-t/\tau).$$

4.11 b) La puissance dissipée par effet Joule l'est dans la résistance et vaut donc :

$$\mathcal{P}_J(t) = Ri^2(t) = \frac{R(CE)^2}{\tau^2} \exp(-2t/\tau).$$

En simplifiant à l'aide de la relation $\tau = RC$, on trouve $\mathcal{P}_J(t) = \frac{CE^2}{\tau} \exp(-2t/\tau)$.

4.11 c) La puissance instantanée reçue par le condensateur vaut :

$$\mathcal{P}_C(t) = u_C(t)i(t) = E(1 - \exp(-t/\tau)) \times \frac{CE}{\tau} \exp(-t/\tau) = \frac{CE^2}{\tau} \left(\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau) \right).$$

Remarquons que, par conservation de la puissance, cette dernière expression peut s'obtenir en faisant la différence entre les deux précédentes, la puissance reçue par le condensateur étant égale à la puissance fournie par la source de tension dont on a retranché la puissance dissipée dans le conducteur ohmique. C'est un bon moyen de contrôler le résultat.

4.11 d) Il faut intégrer la puissance $\mathcal{P}_E(t)$ fournie par la source sur toute la durée de la charge du condensateur, c'est-à-dire de $t = 0$ à $t = +\infty$. On a donc :

$$\mathcal{E}_E = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_E(t) dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{CE^2}{\tau} \exp(-t/\tau) dt = (-\tau) \frac{CE^2}{\tau} \left[\exp(-t/\tau) \right]_0^{+\infty} = CE^2.$$

Remarquons que cette expression est homogène à l'énergie contenue dans un condensateur $\frac{1}{2}Cu_C^2$.

4.11 e) Il faut intégrer la puissance $\mathcal{P}_J(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$:

$$\mathcal{E}_J = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_J(t) dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{CE^2}{\tau} \exp(-2t/\tau) dt = \frac{CE^2}{\tau} \left(-\frac{\tau}{2} \right) \left[\exp(-2t/\tau) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}CE^2.$$

4.11 f) Il faut intégrer la puissance $\mathcal{P}_C(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, c'est-à-dire de $t = 0$ à $t = +\infty$. On a donc :

$$\mathcal{E}_C = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_C(t) dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} \frac{CE^2}{\tau} (\exp(-t/\tau) - \exp(-2t/\tau)) dt.$$

On reconnaît les deux intégrales précédentes donc :

$$\mathcal{E}_C = (-\tau) \frac{CE^2}{\tau} \left[\exp(-t/\tau) \right]_0^{+\infty} - \frac{CE^2}{\tau} \left(-\frac{\tau}{2} \right) \left[\exp(-2t/\tau) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}CE^2.$$

Alternativement, on aurait pu effectuer le calcul suivant :

$$\mathcal{E}_C = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_C(t) dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} u_C i dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} u_C \cdot C \frac{du_C}{dt} dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$$

pour trouver :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}C(u_C^2(+\infty) - u_C^2(0)) = \frac{1}{2}CE^2,$$

qui est le même résultat.

Remarquons que, par conservation de l'énergie, cette dernière expression peut s'obtenir en faisant la différence entre les deux précédentes, l'énergie reçue par le condensateur étant égale à l'énergie fournie par la source de tension dont on a retranché l'énergie dissipée dans le conducteur ohmique. C'est un bon moyen de contrôler le résultat.

4.12 a) La puissance instantanée délivrée par la source de tension s'écrit $\mathcal{P}_E(t) = Ei(t) = EC \frac{du_C}{dt}$.

4.12 b) La puissance instantanée reçue par le condensateur s'écrit :

$$\mathcal{P}_C(t) = u_C(t)i(t) = u_C(t)C \frac{du_C}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right)}{dt}.$$

4.12 c) La puissance instantanée reçue par la bobine s'écrit $\mathcal{P}_L(t) = u_L(t)i(t) = L \frac{di}{dt}i(t) = \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)}{dt}$.

4.12 d) On intègre la puissance $\mathcal{P}_E(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$:

$$\mathcal{E}_E = \int_{t=0}^{t=+\infty} EC \frac{du_C}{dt} dt = CE \int_{t=0}^{t=+\infty} du_C = CE(u_C(t=+\infty) - u_C(t=0)) = CE^2.$$

4.12 e) On intègre la puissance $\mathcal{P}_C(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$:

$$\mathcal{E}_C = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_C(t) dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) = \frac{1}{2}C(u_C^2(+\infty) - u_C^2(0)) = \frac{1}{2}CE^2.$$

4.12 f) On intègre la puissance $\mathcal{P}_L(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$:

$$\mathcal{E}_L = \int_{t=0}^{t=+\infty} \mathcal{P}_L(t) dt = \int_{t=0}^{t=+\infty} d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{1}{2}L(i^2(+\infty) - i^2(0)) = 0.$$

4.12 g) Il faudrait intégrer la puissance dissipée par effet Joule $\mathcal{P}_J(t) = Ri^2(t)$ sur tout le temps de la charge du condensateur, de $t = 0$ à $t = +\infty$. Cependant, on n'a pas accès à l'expression de $i(t)$. On peut alors malgré tout se servir de la conservation de l'énergie :

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_E - \mathcal{E}_C - \mathcal{E}_L = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 - 0 = \frac{1}{2}CE^2.$$