

Énoncés

Cinématique

Déplacements rectilignes

Entraînement 1.1 — Distance et temps de parcours.

Une voiture se déplace en ligne droite à $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Toutes les réponses seront exprimées en « heures-minutes-secondes », par exemple « 2 h 32 min 12 s ».

a) Combien de temps faut-il à cette voiture pour parcourir 100 km ?

b) Quel serait l'allongement du temps de trajet si elle roulait à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Entraînement 1.2 — Distance parcourue.

Une voiture se déplace en ligne droite. Initialement à l'arrêt, elle subit une accélération constante valant a_0 pendant une durée τ_1 , puis continue à vitesse constante pendant une durée τ_2 .

a) Quelle est la vitesse v_1 du véhicule à la date $t = \tau_1$?

b) Quelle est la distance parcourue durant τ_1 ?

c) Quelle est la distance totale parcourue en fonction de a_0 , τ_1 et τ_2 ?

Entraînement 1.3 — Longueur d'une piste de décollage.

Pour décoller, un avion doit atteindre la vitesse $v_d = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en bout de piste.

Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

(a) 300 m

(b) 450 m

(c) 500 m

(d) 650 m

.....

Entraînement 1.4 — Distance de freinage.

Une voiture roule à $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en ligne droite. En supposant que les freins imposent une décélération constante de norme $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, déterminer la distance d'arrêt de la voiture.

(a) 37,8 m

(b) 46,7 m

(c) 55,9 m

(d) 63,5 m

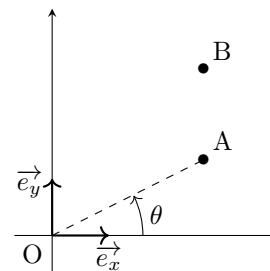
.....

Coordonnées et projections de vecteurs

Entraînement 1.5 — Composantes de vecteurs.

On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy). Le vecteur $\vec{OA}$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de $a = \|\vec{OA}\|$, $b = \|\vec{AB}\|$ et de l'angle θ .



a) $\vec{OA}$

b) $\vec{OB}$

c) $\vec{OA} + \vec{OB}$

d) $\vec{OA} - \vec{OB}$

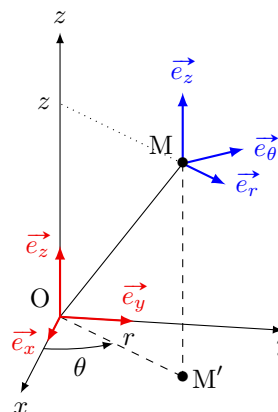
Entraînement 1.6 — Les coordonnées cylindriques.

On considère le schéma ci-contre, dans lequel

- la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- et la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

sont définies.

Le point M est repéré par la donnée de r , θ et z .



a) Écrire le vecteur $\vec{OM'}$ dans la base cartésienne

b) Écrire le vecteur $\vec{OM'}$ dans la base cylindrique

c) Écrire le vecteur $\vec{OM}$ dans la base cartésienne

d) Écrire le vecteur $\vec{OM}$ dans la base cylindrique

Entraînement 1.7 — Jouons au tennis.

Un élève regarde un match de tennis. Il filme un des échanges et décide d'étudier le mouvement de la balle pour en déduire sa vitesse et son accélération.

Pour cela, il utilise un logiciel d'exploitation de vidéo et remplit le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
x (en m)	0	0,35	0,70	1,05	1,40
y (en m)	1,5	2,09	2,66	3,21	3,74

a) Déterminer la vitesse v_0 (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) de la balle à l'instant initial

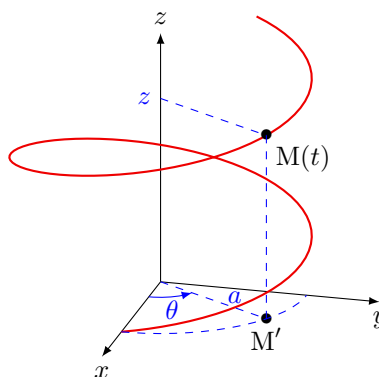
b) Déterminer l'accélération (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) de la balle à l'instant initial

Dérivée de vecteurs

Entraînement 1.8 — Étude d'un mouvement hélicoïdal.

Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \times \cos(\omega t) \\ y(t) = a \times \sin(\omega t) \\ z(t) = b \times t. \end{cases}$$



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ dans la base cartésienne

b) Déterminer la norme de la vitesse

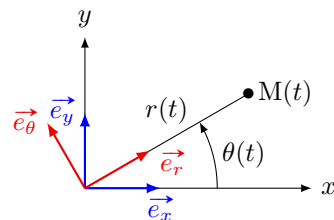
c) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$ dans la base cartésienne

d) Déterminer la norme de l'accélération

Entraînement 1.9 — Dérivation des vecteurs unitaires de la base polaire.

On considère un point $M(t)$ en mouvement dans le plan (xOy) .

On note $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



a) Exprimer le vecteur $\vec{e}_r$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

b) En déduire la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

c) Exprimer le vecteur $\vec{e}_x$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

d) Exprimer le vecteur $\vec{e}_y$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

e) En déduire l'expression de la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base polaire

Entraînement 1.10 — Calcul d'une vitesse en coordonnées polaires.

On considère un point M dont les coordonnées polaires sont $\begin{cases} r(t) = a \times t \\ \theta(t) = b \times t^2 \end{cases}$.

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v}(M) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta,$$

où $\dot{r} \vec{e}_r$ est appelée *vitesse radiale* et $r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ *vitesse orthoradiale*.

a) Déterminer la dimension de a

b) Déterminer la dimension de b

c) Déterminer la vitesse radiale en fonction de a

d) Déterminer la vitesse orthoradiale en fonction de a , b et t

e) En déduire l'expression de $\vec{v}(M)$

Entraînement 1.11 — Mouvement en spirale.

Un point $M(t)$ décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, les coordonnées

de $M(t)$ sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t/\tau} \\ \theta(t) = \omega t, \end{cases}$$

où r_0 , τ et ω sont des constantes positives.

a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires.

On pourra utiliser la formule donnée dans l'entraînement précédent

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

b) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$

On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4,78 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$, $\tau = 2,0 \text{ s}$ et $r_0 = 4,0 \text{ cm}$.

c) Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale?

d) Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré?

e) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de M

Étude de quelques mouvements

Entraînement 1.12 — Collision sur plan incliné.

Deux billes évoluent sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale.

À $t = 0$, elles sont distantes d'une longueur L .

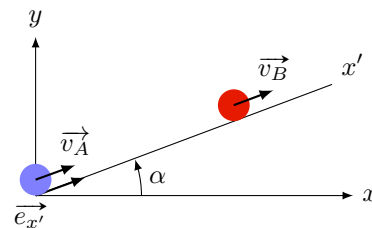
- La bille A possède une vitesse initiale $v_0 \vec{e}_{x'}$.

Son accélération $\vec{a}(A) = -a \vec{e}_{x'}$ est constante au cours du temps.

Nous noterons $v_A(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .

- La bille B, quant à elle, n'a pas de vitesse initiale mais possède une accélération constante $\vec{a}(B) = a \vec{e}_{x'}$.

Nous noterons $v_B(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .



On donne $a = 3,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Exprimer $v_A(t)$ en fonction a , t et v_0

b) Exprimer $v_B(t)$ en fonction a et t

c) Déterminer la position x'_A de A en fonction du temps

d) Déterminer la position x'_B de B en fonction du temps

e) Déterminer la distance L maximale (en cm) pour qu'une collision puisse avoir lieu.

Entraînement 1.13 — Chute libre.

On considère le point M de masse m et de coordonnées (x, y, z) dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Il est lancé avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$ à partir de l'origine O du repère dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

Tout frottement étant négligé, l'accélération de M est égale à $\vec{g}$ à tout instant.

a) Exprimer $x(t)$ en fonction de v_{0x} et t

b) Exprimer $z(t)$ en fonction de v_{0z} , g et t

c) En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire z en fonction de x ,
 c'est-à-dire une relation entre $x(t)$ et $z(t)$

Entraînement 1.14 — Pauvre gazelle.

Un lion chasse une gazelle. Il court à la vitesse constante de $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La gazelle aperçoit le lion quand il est à 10 m de distance. Elle se met alors en fuite en accélérant à $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pour rattraper la gazelle, le lion se met aussi à accélérer au même instant à $3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) Combien de temps mettra le lion à rattraper la gazelle?

b) Quelle distance aura parcourue la gazelle avant de se faire dévorer?

Principe fondamental de la dynamique

Pour commencer

Entraînement 2.1 — Une relation algébrique.

La vitesse v (en régime permanent) d'un mobile vérifie l'équation :

$$m_1(v - v_1) + m_2(v - v_2) = p.$$

Donner l'expression de v (en fonction de m_1 , m_2 , v_1 , v_2 et p)

Entraînement 2.2 — Un système de deux équations.

Un problème de mécanique fait intervenir une force d'intensité F et un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En projetant la deuxième loi de Newton sur deux axes, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T + F \sin \alpha = mR\omega^2 \\ F \cos \alpha = mg. \end{cases}$$

a) Déterminer F en fonction des données T , m , R , ω et g

b) Déterminer α en fonction des données T , m , R , ω et g

Entraînement 2.3 — Quelques équations différentielles.

Résoudre les équations différentielles suivantes, sachant que $v = 0$ à $t = t_0$ et que les paramètres a_0 et k sont des constantes.

a) $\frac{dv}{dt} = a_0$

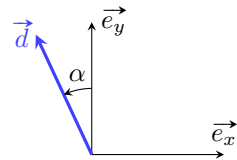
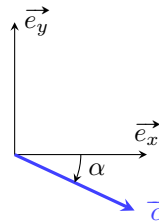
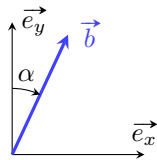
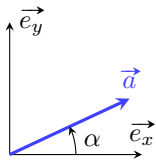
b) $\frac{dv}{dt} = -kv$

c) $\frac{dv}{dt} = -kv + a_0$

Décomposition de vecteurs

Entraînement 2.4 — Des projections.

On considère les vecteurs unitaires suivants :



Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs :

a) $\vec{a}$

c) $\vec{c}$

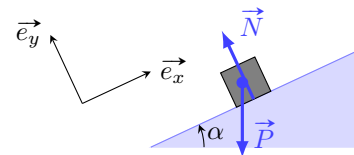
b) $\vec{b}$

d) $\vec{d}$

Entraînement 2.5 — Sur un plan incliné.

On considère la situation représentée ci-contre.

Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs suivants en fonction de α et des normes respectives de $\vec{P}$ et $\vec{N}$: P et N .

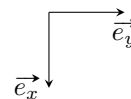
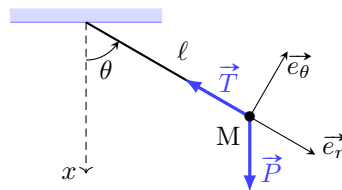


a) $\vec{P}$

b) $\vec{N}$

Entraînement 2.6 — Avec un pendule simple (I).

On considère la situation ci-dessous :



Décomposer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs suivants en fonction de θ et des normes respectives de $\vec{P}$ et $\vec{T}$: P et T .

a) $\vec{P}$

c) $\vec{P} + \vec{T}$

b) $\vec{T}$

Entraînement 2.7 — Avec un pendule simple (II).

On se place dans la même situation que ci-dessus. Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

a) $\vec{P}$

c) $\vec{P} + \vec{T}$

b) $\vec{T}$

Entre accélération et position

Entraînement 2.8 — Du vecteur position au vecteur accélération.

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont, à chaque instant, $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) position

b) vitesse

c) accélération ..

Entraînement 2.9 — Du vecteur accélération au vecteur position.

On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ et une position initiale $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) accélération

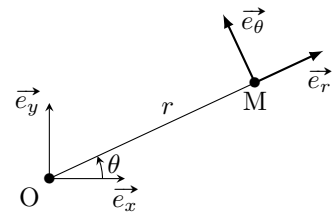
c) position

b) vitesse

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires. La distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



Entraînement 2.10 — Trois calculs fondamentaux.

Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs :

a) $\vec{e}_r$ b) $\vec{e}_\theta$

En déduire (en dérivant) l'expression dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ des vecteurs :

c) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ d) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

En déduire l'expression, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, des vecteurs :

e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ f) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

Entraînement 2.11 — Vecteur position en coordonnées polaires.

Comment s'exprime le vecteur position $\vec{OM}$ en coordonnées polaires ?

Ⓐ $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta$ Ⓑ $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ Ⓒ $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ Ⓓ $\vec{OM} = \theta\vec{e}_\theta$

.....

Entraînement 2.12 — Accélération en coordonnées polaires.

Déduire de ce qui précède l'expression, en fonction de $\vec{e}_r$ et de $\vec{e}_\theta$:

a) du vecteur vitesse $\vec{v}$

b) du vecteur accélération $\vec{a}$

Étude de systèmes en équilibre

Entraînement 2.13 — Tension d'un fil.

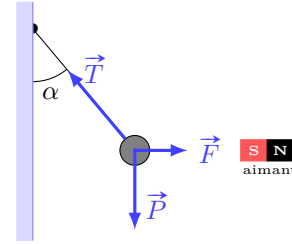
Une bille d'acier de poids $P = \|\vec{P}\| = 2,0 \text{ N}$, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $\ell = 50 \text{ cm}$, est attirée par un aimant exerçant une force $F = \|\vec{F}\| = 1,0 \text{ N}$. À l'équilibre, le fil s'incline d'un angle α et l'on a :

$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0},$$

où $\vec{T}$ est la tension exercée par le fil.

Calculer les valeurs numériques de :

- a) la tension $T = \|\vec{T}\|$ du fil
- b) l'angle α (en radians)



Entraînement 2.14 — Masse suspendue.

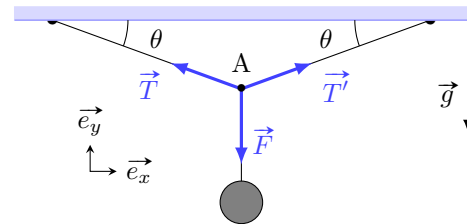
Un objet qui pèse 800 N est suspendu en équilibre à l'aide de deux cordes symétriques qui font un angle $\theta = 20^\circ$ avec la direction horizontale.

Le point A est soumis à trois forces :

$$\vec{T}, \vec{T}' \text{ et } \vec{F},$$

de normes respectives T, T' et F .

On note $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y$ la résultante des forces.



- a) Exprimer la composante horizontale R_x en fonction de T, T' et θ
- b) Exprimer la composante verticale R_y en fonction de T, T', F et θ
- c) Déterminer la tension T en résolvant l'équation $\vec{R} = \vec{0}$

Mouvements rectilignes

Entraînement 2.15 — Chute avec frottement.

Un corps de masse $m = 2 \text{ kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Lors de sa chute, il subit la force de pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air.

On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de la force de frottement ?

Entraînement 2.16 — Contact dans un ascenseur.

Un homme de masse $m = 80 \text{ kg}$ est dans un ascenseur qui monte avec une accélération $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On note $\vec{F}$ la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur.

On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de $\vec{F}$?

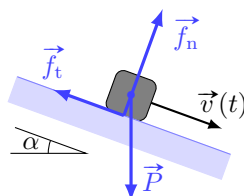
Entraînement 2.17 — Calcul d'une action de contact.

Un bloc de masse m et de poids $\vec{P}$ glisse à une vitesse $v(t)$, variable au cours du temps, sur un support plan qui exerce une action de contact.

Celle-ci se décompose en deux actions :

- une action normale à la surface $\vec{f}_n$;
- une action de frottement $\vec{f}_t$ opposée à la vitesse de glissement.

Le plan est incliné d'un angle α , comme figuré ci-dessous :



Déterminer (en fonction d'au moins une des données $P = \|\vec{P}\|$, $v(t)$, m ou α) :

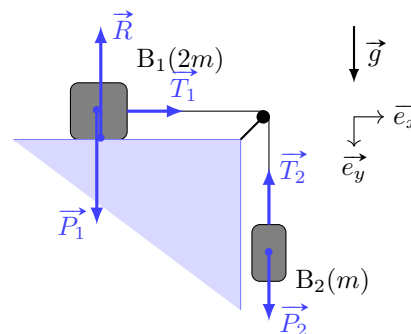
a) l'intensité de l'action normale f_n

b) l'intensité du frottement f_t

Entraînement 2.18 — Calcul d'une accélération.

Deux blocs B_1 et B_2 de masses respectives $2m$ et m sont reliés par un fil. On passe le fil dans la gorge d'une poulie, puis on maintient le bloc B_1 sur la table alors que l'autre est suspendu dans l'air. On libère le bloc B_1 qui glisse alors sur la table. On note T_1 et T_2 les normes des tensions exercées par le fil sur les blocs, a_1 et a_2 les normes des accélérations respectives des blocs B_1 et B_2 , et g la valeur du champ de pesanteur.

Les frottements sont négligeables.



a) Exprimer a_1 en fonction de m et T_1

b) Exprimer l'accélération a_2 de B_2 en fonction de m , g et T_2

Le fil étant inextensible et sans masse, on a $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$.

c) En déduire l'accélération en fonction uniquement de g

Approche énergétique en mécanique

Énergies potentielles

Entraînement 3.1 — La juste formule.

On considère un point matériel de masse m plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On se place dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, le point O étant pris comme origine de l'énergie potentielle. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

(a) mgx

(b) $-mgy$

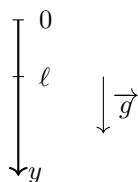
(c) mgz

(d) mgz

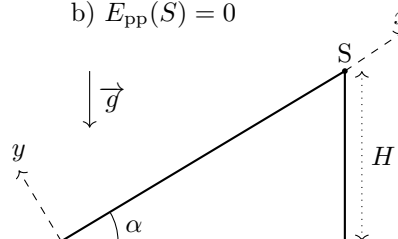
Entraînement 3.2 — Plusieurs expressions de l'énergie potentielle de pesanteur.

Déterminer la fonction énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m associée aux situations suivantes :

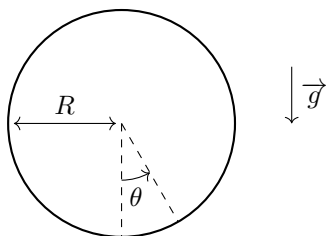
a) $E_{pp}(\ell) = 0$



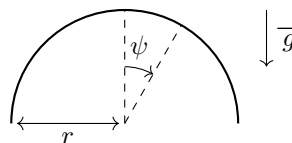
b) $E_{pp}(S) = 0$



c) $E_{pp}(\theta = \pi/2) = 0$



d) $E_{pp}(\psi = 0) = E_0$



a) $E_{pp}(y) = \dots\dots\dots$

c) $E_{pp}(\theta) = \dots\dots\dots$

b) $E_{pp}(x) = \dots\dots\dots$

d) $E_{pp}(\psi) = \dots\dots\dots$

Entraînement 3.3 — La juste formule... le retour.

On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer selon un axe (Oy) horizontal. Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée en O.

Quelle est l'expression de l'énergie potentielle élastique du point M pour que celle-ci soit nulle lorsque l'allongement du ressort est nul ?

Ⓐ $\frac{1}{2}ky^2$

Ⓑ $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2$

Ⓒ $\frac{1}{2}k(y^2 - \ell_0^2)$

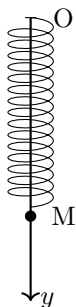
Ⓓ $-\frac{1}{2}k(\ell_0 - y)^2$

.....

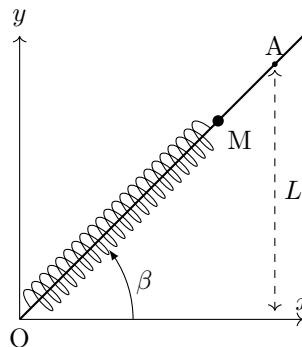
Entraînement 3.4 — Expression de l'énergie potentielle élastique.

Déterminer la fonction énergie potentielle élastique associée aux situations suivantes, où tous les ressorts sont de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k :

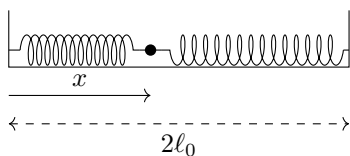
a) $E_{\text{pe}}(y = 0) = 0$



b) $E_{\text{pe}}(A) = 0$



c) $E_{\text{pe}}(x = \ell_0) = E_0$



a) $E_{\text{pe}}(y) =$

b) $E_{\text{pe}}(x) =$

c) $E_{\text{pe}}(x) =$

Travail d'une force

Entraînement 3.5 — Une force de frottement.

On considère le travail $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ d'une force de frottement $\vec{F} = -h \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point matériel subissant la force et h est une constante.

Déterminer W pour les chemins suivants :

a) Un segment reliant A(0,0) et B(ℓ ,0)

b) Un arc de cercle d'angle α et de rayon R

c) Un rectangle ABCD de côtés a et b

d) Un triangle ABC de côtés a, b, c

e) En comparant les résultats obtenus, peut-on dire que la force est conservative ?

☐ a) Oui

☐ b) Non

.....

Théorèmes énergétiques

Entraînement 3.6 — Freinage et variation d'énergie cinétique.

On considère une voiture (assimilée à un point matériel de masse m) se déplaçant le long d'une route rectiligne horizontale et dont la vitesse initiale au début de la phase de freinage vaut $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$.

En freinant, le véhicule est soumis à une force de frottement $\vec{F} = -h \vec{e}_x$.

Quelle est l'expression de la distance d'arrêt d de la voiture ?

☐ a) $\frac{2mv_0^2}{h}$

☐ b) $\frac{mv_0^2}{h}$

☐ c) $\frac{mv_0^2}{2h}$

.....

Entraînement 3.7 — Pendule simple.

Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $\ell = 1,0$ m auquel est accrochée une masse $m = 100$ g.

À $t = 0$, on donne à cette masse une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, où $v_0 = 2,0$ m · s⁻¹.

On note θ_0 l'angle pour lequel la masse rebrousse chemin.

a) Exprimer $\cos(\theta_0)$

b) Calculer θ_0

Entraînement 3.8 — Trampoline simplifié.

Un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30 \text{ cm}$, de raideur $k = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, sans masse, est posé sur le sol à la verticale. On lâche d'une hauteur $H = 2,0 \text{ m}$ et sans vitesse initiale une masse ponctuelle $m = 1,0 \text{ kg}$. Après une durée de chute libre sans frottement, la masse atteint le ressort, le comprime jusqu'à ce que celui-ci la propulse vers le haut comme le ferait un trampoline.

En admettant que la masse quitte le ressort quand $z = \ell_0$, calculer :

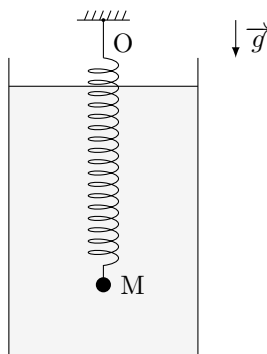
a) La vitesse de la masse lors du contact avec le ressort

b) L'altitude minimale atteinte par la masse

c) L'altitude maximale de la masse (en fin de remontée)

Entraînement 3.9 — Oscillateur vertical.

Un point M de masse m est accroché à une paroi horizontale fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Son mouvement s'effectue dans un liquide qui produit une force de frottements fluides linéaire $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, où $\alpha > 0$. On néglige la poussée d'Archimède, on ne considère que des mouvements verticaux dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.



a) On note z la position de M par rapport à O.

Déterminer, par une méthode énergétique, l'équation différentielle vérifiée par z .

.....

b) On note à présent ζ la position de M par rapport à sa position à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ζ .

.....

Mouvements conservatifs et positions d'équilibre

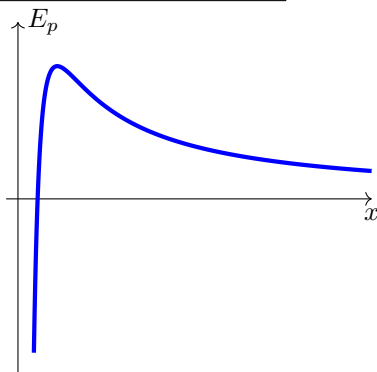
Entraînement 3.10 — Profils d'énergies potentielles.

Les quatre profils ci-après représentent la fonction énergie potentielle suivante :

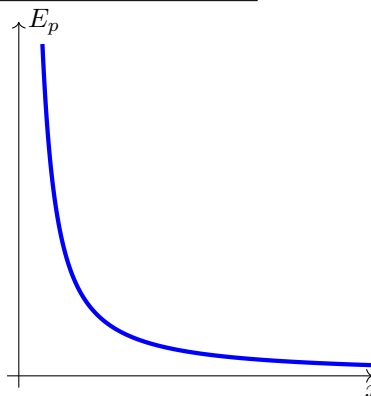
$$E_p(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2},$$

avec α, β des réels non nuls.

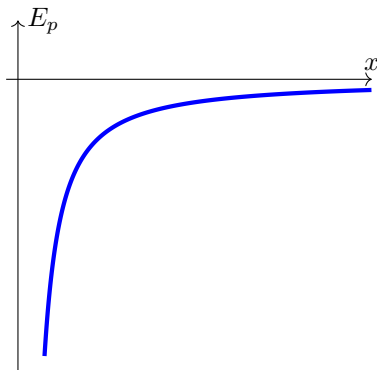
Énergie potentielle n° 1



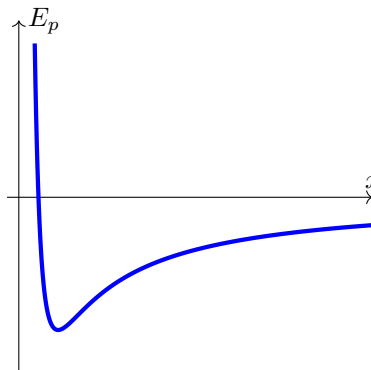
Énergie potentielle n° 3



Énergie potentielle n° 2



Énergie potentielle n° 4



Attribuer à chacune des figures ci-dessus les bons signes pour α et β , en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

(c) $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

(b) $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

(d) $\alpha < 0$ et $\beta < 0$

a) Énergie potentielle n° 1

c) Énergie potentielle n° 3

b) Énergie potentielle n° 2

d) Énergie potentielle n° 4

Entraînement 3.11 — Autour d'une position d'équilibre.

On donne l'expression de potentiels E_p , dans chacun desquels évolue un point matériel de masse m .

Déterminer dans chaque cas la position d'équilibre stable.

a) Pour $E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta))$:

$\theta_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

b) Pour $E_p(z) = \frac{1}{2}\kappa z^2 + \frac{1}{4}\lambda z^4$ avec $\kappa > 0$ et $\lambda < 0$:

$z_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

c) Pour $E_p(x) = U_0 e^{\beta x^2}$ avec $U_0, \beta > 0$:

$x_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

d) Pour $E_p(\phi) = E_0 \sin^2(\phi - a)$ avec $E_0 > 0$, $\phi \in [0, \pi[$ et $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$\phi_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

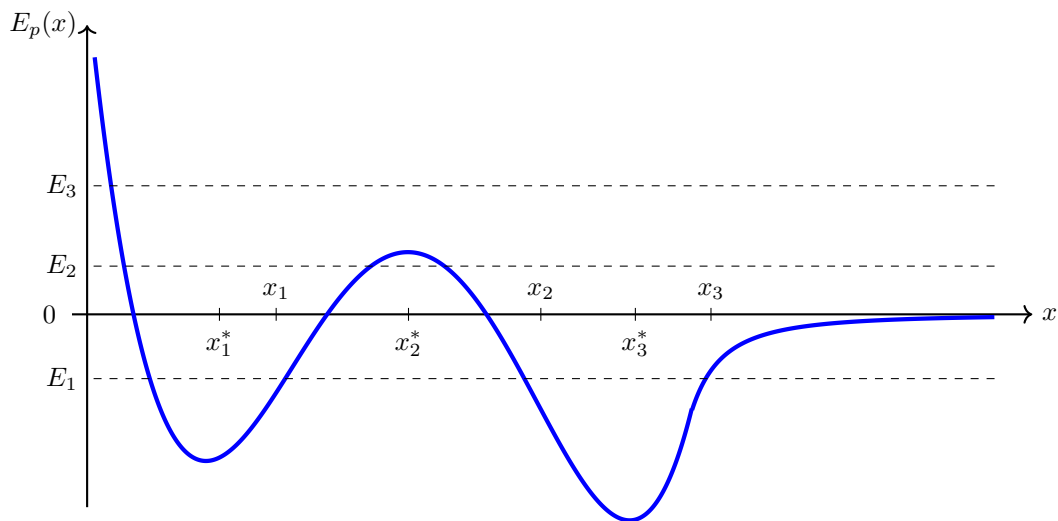
Entraînement 3.12 — État lié ou état de diffusion ?

On considère le profil suivant d'énergie potentielle (les abscisses étoilées et l'abscisse x_3 serviront dans l'entraînement suivant).

Pour chaque état suivant, étant donné les valeurs de l'énergie mécanique et de la position initiale d'un point matériel, dire si ce dernier se trouve :

Ⓐ dans un état lié

Ⓑ dans un état de diffusion



a) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_1$

d) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_2$

b) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_2$

e) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_1$

c) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_1$

f) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_2$

Entraînement 3.13 — Analyse d'un profil d'énergie potentielle.

On reprend le profil d'énergie potentielle de l'entraînement précédent.

Pour chacune des positions suivantes, déterminer si elle est stable ou instable, et si le mouvement au voisinage de ces positions est périodique et/ou harmonique, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) équilibre stable

(c) mouvement périodique

(b) équilibre instable

(d) mouvement harmonique

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

a) Voisinage de x_1^*

c) Voisinage de x_3^*

b) Voisinage de x_2^*

d) Région entre x_2 et x_3

Entraînement 3.14 — Vitesse à l'infini.

On considère le profil d'énergie potentielle des deux entraînements précédents.

Un point matériel de masse $m = 2,30$ kg est abandonné avec l'énergie $E_3 = 1,30$ kJ.

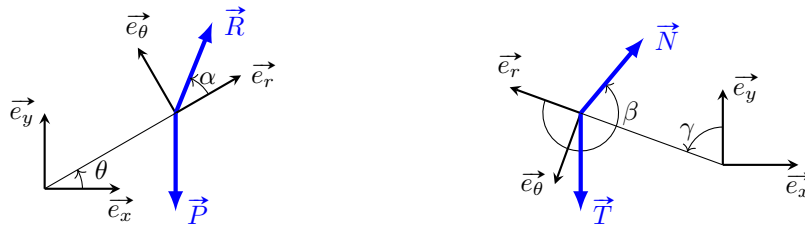
Calculer la vitesse du point matériel à l'infini

Moment cinétique

Projections préparatoires

Entraînement 4.1 — Calcul de produits scalaires.

On considère les vecteurs suivants, où $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont verticaux :



Calculer les produits scalaires suivants en fonction des normes ($\|\vec{P}\|$, $\|\vec{T}\|$, etc.) ainsi que des différents angles apparaissant sur les schémas.

- | | | | | | |
|---|----------------------|------------------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $\vec{P} \cdot \vec{e}_\theta \dots$ | <input type="text"/> | c) $\vec{R} \cdot \vec{e}_y \dots$ | <input type="text"/> | e) $\vec{N} \cdot \vec{e}_r \dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\vec{N} \cdot \vec{e}_y \dots$ | <input type="text"/> | d) $\vec{T} \cdot \vec{e}_r \dots$ | <input type="text"/> | f) $\vec{N} \cdot \vec{e}_\theta \dots$ | <input type="text"/> |

Entraînement 4.2 — Projections dans une base.

En utilisant la formule donnant la décomposition d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2,$$

décomposer les vecteurs de l'exercice précédent dans chaque base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\vec{P}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \dots$ | <input type="text"/> | e) $\vec{R}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\vec{P}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \dots$ | <input type="text"/> | f) $\vec{R}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \dots$ | <input type="text"/> |
| c) $\vec{T}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \dots$ | <input type="text"/> | g) $\vec{N}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \dots$ | <input type="text"/> |
| d) $\vec{T}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \dots$ | <input type="text"/> | h) $\vec{N}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \dots$ | <input type="text"/> |

Moment cinétique

Entraînement 4.3 — Bataille de moments cinétiques.

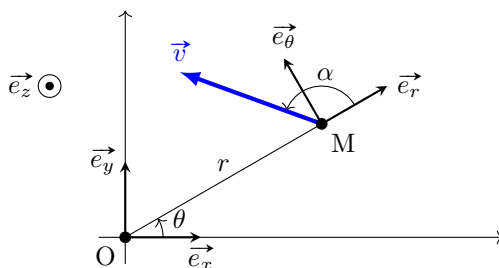
Parmi les quatre planètes décrites dans le tableau ci-dessous, laquelle présente le moment cinétique autour du Soleil le plus important ?

	Masse	Distance au Soleil	Vitesse sur l'orbite
Mercure	$3 \times 10^{26} \text{ g}$	$58 \times 10^9 \text{ m}$	$170 \times 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
Vénus	$5 \times 10^{27} \text{ g}$	$1,1 \times 10^{13} \text{ cm}$	$35 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Terre	$6 \times 10^{21} \text{ t}$	$150 \times 10^6 \text{ km}$	$30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Mars	$6 \times 10^{23} \text{ kg}$	$230 \times 10^6 \text{ km}$	$87 \times 10^5 \text{ cm} \cdot \text{h}^{-1}$

.....

Entraînement 4.4 — Un moustique allumé.

On considère un moustique M de masse m dont le vecteur vitesse de norme v fait un angle $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$ comme représenté dans le schéma ci-dessous.



Exprimer le moment cinétique du moustique M par rapport à O en fonction de m , r , v et α .

.....

Moments d'inertie

Entraînement 4.5 — Une porte d'entrée.

On considère une porte de masse M , de longueur L , de hauteur h et d'épaisseur e négligeable dont on veut calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical passant par O situé dans le coin inférieur gauche de la porte.

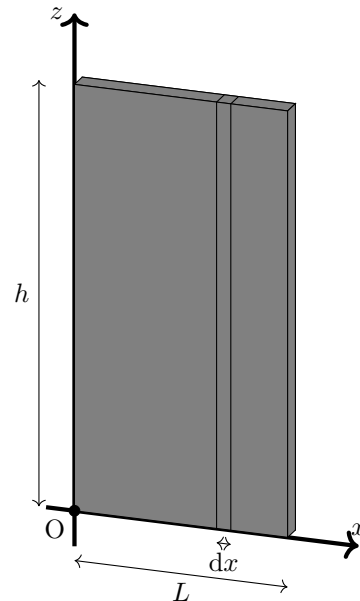
La masse est répartie de manière homogène sur toute la porte, de sorte que chaque petit volume $dV = dx dy dz$ ait pour masse :

$$dm = \rho dV,$$

avec $\rho = \frac{M}{Lhe}$.

Dans cette configuration, le moment d'inertie s'écrit :

$$I_{\Delta} = \iiint_{\text{porte}} x^2 dm = \rho \int_0^L x^2 dx \times \int_0^e dy \times \int_0^h dz.$$



Exprimer I_{Δ} en fonction de M et L

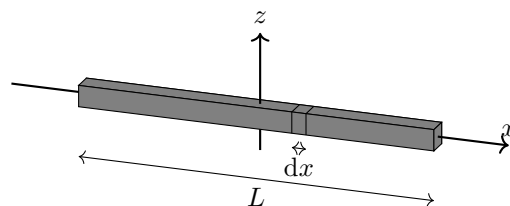
Entraînement 4.6 — Un bâton de majorette.

On considère un bâton de masse M , de longueur L et de section négligeable dont on veut calculer le moment d'inertie par rapport à son centre O .

La masse est régulièrement répartie uniquement selon une variable x , de sorte que le bout de bâton de longueur dx situé à une distance x du centre ait pour masse $dm = \frac{M}{L} dx$.

Pour une rotation par rapport à un axe (Oz) orthogonal à l'axe (Ox) du bâton, et passant par son centre, calculer en fonction de M et L l'expression du moment d'inertie. C'est-à-dire, calculer :

$$I_{\Delta} = \int_{\text{bâton}} x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \dots\dots\dots$$

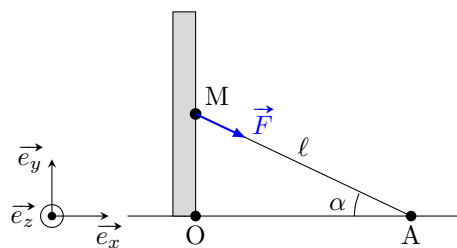


Moment d'une force

Entraînement 4.7 — Fil accroché au mur.

On considère un mur auquel est accroché un filin qu'on tire depuis un point A. Il s'agit de trouver le moment de la force $\vec{F}$ par rapport aux axes (Oz) et (Az) en fonction de F , ℓ et α .

Calculer :



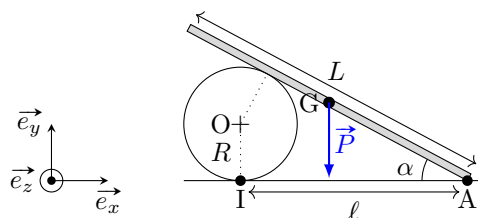
a) $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$

b) $\mathcal{M}_{Az}(\vec{F})$

Entraînement 4.8 — Une planche de cirque.

On considère une planche homogène de masse m appuyée sur un cylindre.

Calculer le moment du poids de cette planche par rapport aux divers points intéressants du système.



a) $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P})$

b) $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$

c) $\vec{\mathcal{M}}_I(\vec{P})$

Exercice récapitulatif

Entraînement 4.9 — Basculement d'une barre en T.

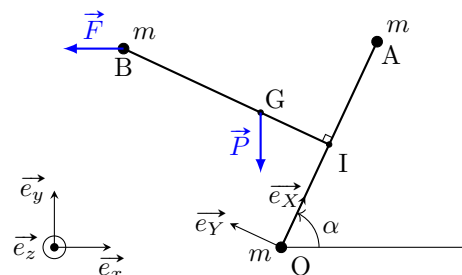
On considère trois masses m réparties aux trois sommets d'un triangle OAB isocèle en B et reliées par des tiges sans masse vérifiant :

$$OA = IB = a.$$

On note I le milieu du segment [OA].

On note G le centre de gravité des trois masses, qui est situé sur le segment [IB] de sorte que $GB = \frac{2}{3}a$.

On notera P et F les normes des deux forces représentées sur le schéma.



a) Écrire le vecteur $\vec{OB}$ dans la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$

b) Écrire le vecteur $\vec{OG}$ dans la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$

c) Écrire le vecteur $\vec{P}$ dans la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$

d) Écrire le vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$

e) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$

f) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$

g) En supposant qu'il y ait équilibre entre les deux moments, déterminer l'expression $\tan(\alpha)$ dans ce cas.

.....

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Cinématique

Réponses

1.1 a) $1 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s}$

1.1 b) $8 \text{ min } 20 \text{ s}$

1.2 a) $a_0 \times \tau_1$

1.2 b) $\frac{a_0 \times \tau_1^2}{2}$

1.2 c) $a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2\right)$

1.3 (c)

1.4 (b)

1.5 a) $a(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$

1.5 b) $a\left(\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$

1.5 c) $a\left(2\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(2\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$

1.5 d) $-b\vec{e}_y$

1.6 a) $r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$

1.6 b) $r\vec{e}_r$

1.6 c) $r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) + z\vec{e}_z$

1.6 d) $r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$

1.7 a) $49,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

1.7 b) $8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

1.8 a) $a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y) + b\vec{e}_z$

1.8 b) $\sqrt{(a\omega)^2 + b^2}$

1.8 c) $-a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$

1.8 d) $a\omega^2$

1.9 a) $\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$

1.9 b) $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)$

1.9 c) $\vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$

1.9 d) $\vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta$

1.9 e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

1.10 a) $\frac{L}{T}$

1.10 b) $\frac{1}{T^2}$

1.10 c) $a\vec{e}_r$

1.10 d) $2abt^2\vec{e}_\theta$

1.10 e) $a\vec{e}_r + 2abt^2\vec{e}_\theta$

1.11 a) $r_0e^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\vec{e}_r + \omega\vec{e}_\theta\right)$

1.11 b) $r_0e^{-t/\tau}\left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e}_r - \left(2\frac{\omega}{\tau}\right)\vec{e}_\theta\right)$

1.11 c) orthoradiale

1.11 d) décéléré

1.11 e) $r = r_0e^{-\theta}$

1.12 a) $-at + v_0$

1.12 b) at

1.12 c) $-\frac{1}{2}at^2 + v_0t$

1.12 d) $\frac{1}{2}at^2 + L$

1.12 e) 67 cm

1.13 a) $v_{0x}t$

1.13 b) $-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$

1.13 c) $z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x$

1.14 a) $1,7 \text{ s}$

1.14 b) $2,9 \text{ m}$

Corrigés

1.1 a) La voiture avance à vitesse constante. Pour parcourir 100 km, il lui faudra le temps :

$$\tau = \frac{100 \text{ km}}{90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} = 1,11 \text{ h} = 1 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s}.$$

1.1 b) Pour parcourir 100 km à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, il lui faudrait le temps $\tau' = \frac{100 \text{ km}}{80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}} = 1,25 \text{ h}$. Le temps de trajet serait donc allongé de $\Delta t = \tau' - \tau = 0,14 \text{ h} = 8 \text{ min } 20 \text{ s}$.

1.2 a) L'accélération est constante durant le temps τ_1 et la vitesse initiale est nulle. La vitesse à un instant t vaut donc $v(t) = a_0 \times t$, d'où $v_1 = v(\tau_1) = a_0 \times \tau_1$.

1.2 b) Pour $t \in [0, \tau_1]$, la vitesse est décrite par l'équation : $v(t) = a_0 \times t$. La distance parcourue à la date t s'écrit donc $d(t) = \frac{1}{2} a_0 \times t^2$. Ainsi, on a $d_1 = d(\tau_1) = \frac{a_0 \times \tau_1^2}{2}$.

1.2 c) La distance totale parcourue est $d_{\text{tot}} = d_1 + d_2$, avec d_1 évaluée à la question précédente et d_2 la distance parcourue par le véhicule dans la seconde phase du mouvement où il progresse à vitesse constante.

Or, on a $d_2 = v_1 \times \tau_2$. Ainsi, on a $d_{\text{tot}} = a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2 \right)$.

1.3 À $t = 0$, l'avion a une vitesse nulle. Sa vitesse au temps t s'écrit alors $v(t) = a \times t$ et la distance qu'il parcourt vaut $d(t) = \frac{1}{2} a \times t^2$.

D'abord le temps t_d où l'avion atteint la vitesse v_d vaut $t_d = \frac{v_d}{a}$.

Pour faire l'application numérique, il nous faut exprimer la vitesse v_d en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. On a :

$$v_d = \frac{180 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et donc } t_d = \frac{50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 20 \text{ s}.$$

La longueur de la piste correspond à la distance parcourue pendant cette durée, donc :

$$L = \frac{1}{2} a \times t_d^2 = \frac{v_d^2}{2a} = \frac{(50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \times 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 500 \text{ m}.$$

1.4 La vitesse de la voiture à un instant t s'écrit $v(t) = v_i - a \times t$ avec :

$$v_i = 110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{110 \times 10^3 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 30,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ainsi, le véhicule s'arrêtera à la date t_a telle que $v_i - a \times t = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. On a $t_a = \frac{v_i}{a} = \frac{30,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 3,06 \text{ s}$.

La distance parcourue pendant le freinage vaut $d(t) = v_i \times t - \frac{1}{2} a \times t^2$.

La distance d'arrêt d_a correspond à la distance parcourue pendant la durée t_a : c'est $d_a = \frac{v_i^2}{2a} = 46,7 \text{ m}$.

1.5 a) On a $\overrightarrow{OA} = a(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$.

1.5 b) On a $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = a\left(\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$.

1.5 c) On a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = a\left(2\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(2\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$.

1.5 d) On a $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = -b\vec{e}_y$.

1.6 a) On a $\overrightarrow{OM}' = r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$.

1.6 b) On a $\overrightarrow{OM}' = r\vec{e}_r$.

1.6 c) On a $\overrightarrow{OM} = r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) + z\vec{e}_z$.

1.6 d) On a $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

1.7 a) La vitesse de la balle à l'instant t_1 s'écrit $\vec{v}(M, t_1) = v_x(t_1)\vec{e}_x + v_y(t_1)\vec{e}_y$, avec :

$$v_x(t_1) \simeq \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t}, \quad v_y(t_1) \simeq \frac{y(t_1 + \Delta t) - y(t_1)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta t = 0,05 \text{ s.}$$

Nous obtenons le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15
v_x (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	7	7	7	7
v_y (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	11,8	11,4	11,0	10,6

À l'instant initial, nous pouvons écrire : $v_0 \simeq \sqrt{(7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 + (11,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2} = 13,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 49,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

1.7 b) L'accélération de la balle à l'instant t_1 s'écrit $\vec{a}(M, t_1) = a_x(t_1)\vec{e}_x + a_y(t_1)\vec{e}_y$, avec :

$$a_x(t_1) \simeq \frac{v_x(t_1 + \Delta t) - v_x(t_1)}{\Delta t}, \quad a_y(t_1) \simeq \frac{v_y(t_1 + \Delta t) - v_y(t_1)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \Delta t = 0,05 \text{ s.}$$

Ceci donne :

$$a_x(0) \simeq \frac{7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,05 \text{ s}} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{et} \quad a_y(0) \simeq \frac{11,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 11,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,05 \text{ s}} = -8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

L'accélération initiale vaut donc $a_0 \simeq \sqrt{(0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^2 + (-8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})^2} = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1.8 a) On a $\vec{v}(M) = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y) + b\vec{e}_z$.

1.8 b) On a $\|\vec{v}(M)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(a\omega)^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + b^2} = \sqrt{(a\omega)^2 + b^2}$.

1.8 c) On a $\vec{a}(M) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z = -a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$.

1.8 d) On a $\|\vec{a}(M)\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = a\omega^2$.

1.10 a) On a $a = \frac{r}{t}$. Ainsi, a est homogène à une longueur sur un temps.

1.10 b) On a $b = \frac{\theta}{t^2}$. Ainsi, b est homogène à un angle sur un temps au carré. Comme un angle est une grandeur sans dimension, on a bien le résultat donné.

1.10 c) La vitesse radiale est $\vec{v}(M)_r = \dot{r}\vec{e}_r = a\vec{e}_r$.

1.10 d) La vitesse orthoradiale est $\vec{v}(M)_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 2abt^2\vec{e}_\theta$.

1.10 e) On a $\vec{v}(M) = a\vec{e}_r + 2abt^2\vec{e}_\theta$.

1.11 a) On a $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r_0e^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\vec{e}_r + \omega\vec{e}_\theta\right)$.

1.11 b) On a $\vec{a}(M) = r_0e^{-t/\tau}\left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e}_r - \left(2\frac{\omega}{\tau}\right)\vec{e}_\theta\right)$.

1.11 c) On a $\omega = 4,78 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{4,78 \times 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 0,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\frac{1}{\tau^2} - \omega^2 = \left(\frac{1}{2^2} - \omega^2\right) = 0 \text{ s}^{-2}$.

Ainsi, on a $\vec{a}(\text{M}, t) = -2 \frac{r_0 \omega}{\tau} e^{-t/\tau} \vec{e}_\theta$. L'accélération est donc orthoradiale.

1.11 d) On a $\vec{a}(\text{M}, t) \cdot \vec{v}(\text{M}, t) = r_0^2 e^{-2t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2 \right) - 2 \frac{\omega^2}{\tau} \right) = r_0^2 e^{-2t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau^3} - \frac{\omega^2}{\tau} \right) < 0$. Le mouvement est donc décéléré.

1.11 e) On a $r = r_0 e^{-t/\tau}$ et $t = \frac{\theta}{\omega}$. Donc, on a $r = r_0 e^{-\theta/(\omega \times \tau)} = r_0 e^{-\theta}$ car $\omega \tau = 1$.

1.12 a) On a $\vec{a}(A) = \frac{d\vec{v}(A)}{dt}$. En projetant sur l'axe $(0, \vec{e}_x)$, on obtient $-a = \frac{dv_A}{dt}$. Puis, en calculant

$$\int_{v_0}^{v_A(t)} dv_A = \int_0^t -a dt,$$

on obtient $v_A(t) = -at + v_0$.

1.12 b) On a $\vec{a}(B) = \frac{d\vec{v}(B)}{dt}$. En projetant sur l'axe $(0, \vec{e}_x)$, on obtient $a = \frac{dv_B}{dt}$. Puis, en calculant

$$\int_0^{v_B(t)} dv_B = \int_0^t a dt,$$

on obtient $v_B(t) = at$.

1.12 c) Sur l'axe $(0, \vec{e}_x)$, on a $v_A(t) = \frac{dx'_A}{dt}$. Donc, on a $\int_0^{x'_A(t)} dx'_A = \int_0^t v_A dt = \int_0^t (-at + v_0) dt$.

Donc, on a $x'_A(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t$.

1.12 d) Sur l'axe $(0, \vec{e}_x)$, on a $v_B(t) = \frac{dx'_B}{dt}$. Donc, on a $\int_L^{x'_B(t)} dx'_B = \int_0^t v_B dt = \int_0^t at dt$.

Donc, on a $x'_B(t) = \frac{1}{2}at^2 + L$.

1.12 e) Nous observerons une collision à la date t_1 si $x'_A(t_1) = x'_B(t_1)$ donc si $-\frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + L$.

Donc, t_1 doit être une solution réelle positive de l'équation suivante :

$$t_1^2 - \frac{v_0}{a}t_1 + \frac{L}{a} = 0,$$

ce qui impose une valeur positive pour son discriminant $\Delta = \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 - 4\frac{L}{a} \geq 0$. Donc, on doit avoir $L \leq \frac{v_0^2}{4a}$.

Après application numérique, on trouve que la distance L doit vérifier $L \leq 67 \text{ cm}$.

1.13 a) On a $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$. En projetant, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g. \end{cases}$$

Donc, on a $v_x = C^{te} = v_{0x}$. En intégrant une deuxième fois, vu que M est initialement en O, on obtient : $x(t) = v_{0x}t$.

1.13 b) On a $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$. En projetant, nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = -g. \end{cases}$$

Donc, en intégrant, on a $\int_{v_{0z}}^{v_z(t)} dv_z = \int_0^t -g \cdot dt$ donc $v_z = -gt + v_{0z}$. En intégrant une deuxième fois, vu que M est initialement en O, on obtient :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t.$$

1.13 c) À partir de l'expression de $x(t)$, on peut écrire $t = x/v_{0x}$. On remplace t par cette expression dans z :

$$z = -\frac{1}{2}g(x/v_{0x})^2 + v_{0z}x/v_{0x}.$$

Finalement, on trouve l'équation $z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x$.

1.14 a) On suppose que le lion et la gazelle se déplacent en ligne droite sur l'axe (Ox). On prend l'origine des temps au moment où la gazelle aperçoit le lion et l'origine de l'axe (Ox) à la position du lion quand la gazelle l'aperçoit.

On intègre deux fois pour avoir la position du lion x_L puis celle de la gazelle x_G en fonction de temps :

$$\begin{cases} x_L(t) = v_0t + \frac{1}{2}a_Lt^2 \\ x_G(t) = d_0 + \frac{1}{2}a_Gt^2, \end{cases}$$

avec $v_0 = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $a_L = 3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_G = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $d_0 = 10 \text{ m}$.

Puis, on égalise ces deux positions pour déterminer le temps t_1 où le lion attrape la gazelle. On obtient une équation du second degré sur t_1 :

$$\frac{a_L - a_G}{2}t_1^2 + v_0t_1 - d_0 = 0. \quad (*)$$

On résout cette équation du second degré qui admet deux racines réelles dont l'une est négative. Le temps cherché est la racine positive : c'est $t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{\Delta}}{a_L - a_G}$ où $\Delta = v_0^2 + 2d_0(a_L - a_G)$ est le discriminant de l'équation (*).

On trouve finalement $t_1 = 1,7 \text{ s}$.

1.14 b) La gazelle aura parcouru la distance $d = \frac{1}{2}a_Gt_1^2$, avec $a_G = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $t_1 = 1,7 \text{ s}$ le temps mis par le lion pour rattraper la gazelle. Finalement, on trouve $d = 2,9 \text{ m}$.

Fiche n° 2. Principe fondamental de la dynamique

Réponses

2.1	$\frac{p + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$	2.9 c)	$(v_0 t + x_0) \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_z$
2.2 a)	$\sqrt{(m R \omega^2 - T)^2 + (m g)^2}$	2.10 a)	$\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y$
2.2 b)	$\arctan\left(\frac{m R \omega^2 - T}{m g}\right)$	2.10 b)	$-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y$
2.3 a)	$a_0(t - t_0)$	2.10 c)	$-\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_y$
2.3 b)	0	2.10 d)	$-\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin(\theta) \vec{e}_y$
2.3 c)	$\frac{a_0}{k} [1 - e^{-k(t-t_0)}]$	2.10 e)	$\dot{\theta} \vec{e}_\theta$
2.4 a)	$\cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y$	2.10 f)	$-\dot{\theta} \vec{e}_r$
2.4 b)	$-\sin(\alpha) \vec{e}_x + \cos(\alpha) \vec{e}_y$	2.11	Ⓒ
2.4 c)	$\cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y$	2.12 a)	$\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
2.4 d)	$-\sin(\alpha) \vec{e}_x + \cos(\alpha) \vec{e}_y$	2.12 b)	$(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$
2.5 a)	$-P \sin(\alpha) \vec{e}_x - P \cos(\alpha) \vec{e}_y$	2.13 a)	2,2 N
2.5 b)	$N \vec{e}_y$	2.13 b)	0,46 rad
2.6 a)	$P \cos(\theta) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta$	2.14 a)	$(T' - T) \cos \theta$
2.6 b)	$-T \vec{e}_r$	2.14 b)	$(T' + T) \sin \theta - F$
2.6 c)	$(P \cos(\theta) - T) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta$	2.14 c)	1,17 kN
2.7 a)	$P \vec{e}_x$	2.15	1,6 N
2.7 b)	$-T \cos(\theta) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y$	2.16	864 N
2.7 c)	$(P - T \cos(\theta)) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y$	2.17 a)	$P \cos \alpha$
2.8 a)	$\left(\frac{1}{2} a_0 t^2 + x_0\right) \vec{e}_x - v_0 t \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z$	2.17 b)	$-m \frac{dv}{dt} + P \sin \alpha$
2.8 b)	$a_0 t \vec{e}_x - v_0 \vec{e}_y$	2.18 a)	$\frac{T_1}{2m}$
2.8 c)	$a_0 \vec{e}_x$	2.18 b)	$g - \frac{T_2}{m}$
2.9 a)	$g \vec{e}_z$	2.18 c)	$\frac{g}{3}$
2.9 b)	$v_0 \vec{e}_x + g t \vec{e}_z$		

Corrigés

2.2 a) Pour obtenir F , il faut pouvoir éliminer α . L'astuce consiste à utiliser l'identité suivante :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

On a $\begin{cases} F \sin \alpha = mR\omega^2 - T \\ F \cos \alpha = mg \end{cases}$, soit $F^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = F^2 = (mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2$. Finalement, l'intensité d'une force étant positive, on trouve $F = \sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2}$.

2.2 b) Quand on écrit le système sous la forme $\begin{cases} F \sin \alpha = mR\omega^2 - T \\ F \cos \alpha = mg \end{cases}$, on s'aperçoit qu'il suffit de faire le rapport des deux équations pour éliminer F . On obtient :

$$\tan \alpha = \frac{mR\omega^2 - T}{mg}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \arctan \left(\frac{mR\omega^2 - T}{mg} \right).$$

2.3 a) La solution générale s'écrit $v(t) = a_0 t + C_1$, où C_1 est une constante d'intégration que l'on détermine à l'aide de la condition $v(t_0) = 0$. Cette condition donne $C_1 = -a_0 t_0$, d'où la solution $v(t) = a_0(t - t_0)$.

2.3 b) La solution générale s'écrit $v(t) = Ae^{-kt}$. La condition initiale $v(t_0) = 0$ implique $A = 0$ puisque $e^{-kt} > 0$ pour tout t . Ainsi la solution est $v(t) = 0$.

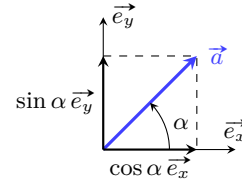
2.3 c) La solution de l'équation homogène est $v(t) = Ae^{-kt}$. Une solution particulière (constante) est $v = \frac{a_0}{k}$. Les solutions sont $v(t) = Ae^{-kt} + \frac{a_0}{k}$. La condition initiale $v(t_0) = 0$ donne $A = -\frac{a_0}{k}e^{kt_0}$. Il en découle la solution générale : $v(t) = \frac{a_0}{k} [1 - e^{-k(t-t_0)}]$.

2.4 a)

La composante suivant $\vec{e}_x$ correspond au produit scalaire :

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_x = 1 \times \cos(\alpha).$$

De même, la composante suivant $\vec{e}_y$ est le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{e}_y = 1 \times \cos(\pi/2 - \alpha) = a \sin(\alpha)$. On peut retrouver ces résultats géométriquement (cf. ci-contre).



2.4 b)

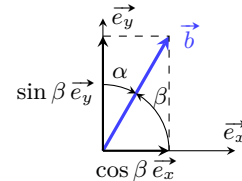
Sur le schéma proposé, $-\pi/2 < \alpha < 0$. On peut introduire β tel que $\beta - \alpha = \pi/2$. La composante suivant $\vec{e}_x$ vaut :

$$b_x = \vec{b} \cdot \vec{e}_x = \cos(\beta) = \cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha).$$

De même, la composante suivant $\vec{e}_y$ vaut :

$$b_y = \vec{b} \cdot \vec{e}_y = \sin(\beta) = \cos(\alpha).$$

On peut vérifier le résultat pour quelques situations : $\alpha = 0$, où $\vec{b} = \vec{e}_y$; ou bien $\alpha = -\pi/2$, où $\vec{b} = \vec{e}_x$.

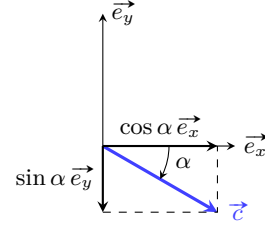


2.4 c)

Il s'agit de la même situation que pour le vecteur $\vec{d}$ mais avec un angle α orienté comme sur le schéma proposé et donc tel que $-\pi/2 < \alpha < 0$. On a :

$$c_x = \vec{c} \cdot \vec{e}_x = \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad c_y = \vec{c} \cdot \vec{e}_y = \sin(\alpha).$$

On retrouve ces projections à l'aide de la construction ci-contre.



2.4 d)

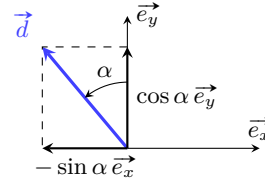
On trouve :

$$d_x = \vec{d} \cdot \vec{e}_x = \cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

et

$$d_y = \vec{d} \cdot \vec{e}_y = \cos(\alpha).$$

La construction ci-contre confirme ces projections.



2.5 a) La composante suivant $\vec{e}_x$ du poids est $P_x = \vec{P} \cdot \vec{e}_x = P \cos(\alpha + \pi/2) = -P \sin(\alpha)$. De même, sa composante suivant $\vec{e}_y$ s'écrit $P_y = \vec{P} \cdot \vec{e}_y = P \cos(\alpha + \pi) = -P \cos(\alpha)$. Ainsi, le poids s'écrit :

$$\vec{P} = -P \sin(\alpha) \vec{e}_x - P \cos(\alpha) \vec{e}_y.$$

2.5 b) Le vecteur $\vec{N}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e}_y$ et de même sens ; on a donc $\vec{N} = N \vec{e}_y$.

2.6 a) La composante suivant $\vec{e}_r$ du poids est $P_r = \vec{P} \cdot \vec{e}_r = P \cos(\theta)$. De même, sa composante suivant $\vec{e}_\theta$ s'écrit $P_\theta = \vec{P} \cdot \vec{e}_\theta = P \cos(\alpha + \pi/2) = -P \sin(\theta)$. Ainsi, le poids s'écrit :

$$\vec{P} = P \cos(\theta) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta.$$

2.6 b) Le vecteur $\vec{T}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e}_r$ et de sens opposé ; on a donc $\vec{T} = -T \vec{e}_r$.

2.7 a) Le poids $\vec{P}$ est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire $\vec{e}_x$; on a donc $\vec{P} = P \vec{e}_x$.

2.7 b) La composante suivant $\vec{e}_x$ de la tension du fil $\vec{T}$ est $T_x = \vec{T} \cdot \vec{e}_x = T \cos(\pi - \theta) = -T \cos(\theta)$.

De même, sa composante suivant $\vec{e}_y$ vaut $T_y = \vec{T} \cdot \vec{e}_y = T \cos(\pi/2 + \theta) = -T \sin(\theta)$. Finalement, on trouve :

$$\vec{T} = -T \cos(\theta) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y.$$

2.8 a) Le vecteur position est le vecteur $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$, d'où :

$$\vec{OM} = \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 + x_0 \right) \vec{e}_x - v_0 t \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z.$$

2.8 b) Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z = a_0 t \vec{e}_x - v_0 \vec{e}_y.$$

2.8 c) Dans le système de coordonnées cartésiennes, le vecteur accélération s'exprime en fonction des dérivées secondes des coordonnées : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z = a_0\vec{e}_x$.

2.9 a) D'après le principe fondamental de la dynamique, on a $mg\vec{e}_z = m\vec{a}$, d'où $\vec{a} = g\vec{e}_z$.

2.9 b) L'accélération s'écrit $\vec{a} = \dot{v}_x\vec{e}_x + \dot{v}_y\vec{e}_y + \dot{v}_z\vec{e}_z$. On en déduit :

$$\begin{cases} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = 0 \\ \dot{v}_z = g \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} v_x = C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = gt + C_3. \end{cases}$$

Les conditions initiales imposent $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$ et $C_3 = 0$. Finalement, on trouve $\vec{v} = v_0\vec{e}_x + gt\vec{e}_z$.

2.9 c) Le vecteur vitesse s'écrit $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.

Par identification avec l'expression obtenue précédemment, on a :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = gt \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x = v_0t + C_4 \\ y = C_5 \\ z = \frac{1}{2}gt^2 + C_6. \end{cases}$$

Les conditions initiales imposent $C_4 = x_0$, $C_5 = y_0$ et $C_6 = 0$. Finalement, on trouve :

$$\vec{OM} = (v_0t + x_0)\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z.$$

2.10 a) On a $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \cos(\theta)$ et $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$, d'où $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$.

2.10 b) On a $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$ et $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_y = \cos(\theta)$, d'où $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$.

2.10 c) Il suffit de dériver le vecteur $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$, en utilisant le fait que $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont des constantes (vectorielles). On a donc $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\cos(\theta)}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\sin(\theta)}{dt}\vec{e}_y$. Ici, θ dépend du temps, par conséquent on a :

$$\frac{d\cos(\theta)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{d\cos(\theta)}{d\theta} = -\dot{\theta}\sin(\theta).$$

De même, on a $\frac{d\sin(\theta)}{dt} = \dot{\theta}\cos(\theta)$. Finalement, on trouve :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_y.$$

2.10 d) En partant de $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$, on trouve :

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\sin(\theta)}{dt}\vec{e}_x + \frac{d\cos(\theta)}{dt}\vec{e}_y = -\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_y.$$

2.11 Le vecteur $\vec{OM}$ est colinéaire et de même sens que $\vec{e}_r$. Sa norme étant égale à r , on a $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.

2.12 a) Il suffit de dériver le vecteur position en utilisant les résultats des exercices précédents. On trouve :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

2.12 b) Dérivons le vecteur vitesse :

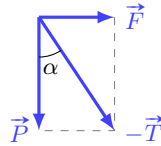
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta.$$

2.13 a) Calculons le carré scalaire :

$$\vec{T}^2 = (-\vec{F} - \vec{P})^2 = F^2 + P^2 + 2\vec{F} \cdot \vec{P} = 5,$$

car $\vec{F} \cdot \vec{P} = 0$. Par conséquent, $T = \sqrt{5N^2} \simeq 2,2N$.

2.13 b) Une construction géométrique permet de trouver immédiatement l'angle α :



$$\tan \alpha = F/P \quad \text{soit} \quad \alpha = 0,46 \text{ rad.}$$

On peut aussi utiliser les produits scalaires. Par exemple :

$$\vec{T} \cdot \vec{F} = T \times F \cos(\pi/2 + \alpha) = -TF \sin \alpha.$$

De plus, compte tenu de l'équilibre des forces, on a :

$$\vec{T} \cdot \vec{F} = (-\vec{F} - \vec{P}) \cdot \vec{F} = -F^2 - \vec{P} \cdot \vec{F} = -F^2.$$

Il en découle $\sin \alpha = F/T$, soit $\alpha = 0,46 \text{ rad}$ (c'est-à-dire $\alpha = 26^\circ$).

2.14 a) On a $\vec{R} = \vec{T} + \vec{T}' + \vec{F}$. La composante horizontale de $\vec{R}$ vaut :

$$R_x = \vec{R} \cdot \vec{e}_x = \underbrace{\vec{T} \cdot \vec{e}_x}_{-T \cos \theta} + \underbrace{\vec{T}' \cdot \vec{e}_x}_{T' \cos \theta} + \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_x}_0 = (T' - T) \cos \theta.$$

2.14 b) La composante verticale de $\vec{R}$ s'écrit :

$$R_y = \vec{R} \cdot \vec{e}_y = \underbrace{\vec{T} \cdot \vec{e}_y}_{T \sin \theta} + \underbrace{\vec{T}' \cdot \vec{e}_y}_{T' \sin \theta} + \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_y}_{-F} = (T' + T) \sin \theta - F.$$

2.14 c) Résoudre l'équation vectorielle $\vec{R} = \vec{0}$, c'est résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (T' - T) \cos \theta = 0 \\ (T' + T) \sin \theta - F = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} T' = T \\ T = \frac{F}{2 \sin \theta}. \end{cases}$$

Sachant que $F = 800N$ et $\theta = 20^\circ$, on obtient $T = 1,17kN$.

2.15 Le principe fondamental de la dynamique impose $m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}$. En projetant la relation précédente suivant la verticale descendante, on obtient $mg - F = ma$, ce qui donne $F = m(g - a) = 1,6 \text{ N}$.

2.16 L'homme subit son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la force de contact due à l'ascenseur $-\vec{F}$ (principe des actions réciproques). Le principe fondamental de la dynamique donne $m\vec{g} - \vec{F} = m\vec{a}$. En projetant sur la verticale ascendante, on obtient $ma = -mg + F$, soit $F = m(a + g) = 80 \text{ kg} \times 10,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 864 \text{ N}$.

2.17 a) Le principe fondamental de la dynamique donne $\vec{P} + \vec{f}_n + \vec{f}_t = m\vec{a}$, avec $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t$ ($\vec{e}_t$ est le vecteur unitaire orienté suivant le vecteur vitesse; c'est le vecteur tangent au vecteur vitesse dans la base de Frenet). Si l'on projette la relation suivant la normale $\vec{e}_n$ au support, on aboutit à :

$$\underbrace{\vec{P} \cdot \vec{e}_n}_{P \cos(\pi - \alpha)} + \underbrace{\vec{f}_n \cdot \vec{e}_n}_{f_n} + \underbrace{\vec{f}_t \cdot \vec{e}_n}_0 = m \frac{dv}{dt} \underbrace{\vec{e}_t \cdot \vec{e}_n}_0,$$

ce qui donne $f_n = -P \cos(\pi - \alpha) = P \cos \alpha$.

2.17 b) En projetant la relation fondamentale de la dynamique suivant la direction tangentielle au support, on obtient :

$$\underbrace{\vec{P} \cdot \vec{e}_t}_{P \cos(\pi/2 - \alpha)} + \underbrace{\vec{f}_n \cdot \vec{e}_t}_0 + \underbrace{\vec{f}_t \cdot \vec{e}_t}_{-f_t} = m \frac{dv}{dt} \underbrace{\vec{e}_t \cdot \vec{e}_t}_1,$$

c'est-à-dire $f_t = -m \frac{dv}{dt} + P \sin \alpha$.

2.18 a) Le principe fondamental appliqué au bloc B₁ donne $2m\vec{g} + \vec{R} + \vec{T}_1 = 2m\vec{a}_1$. En projetant cette relation suivant le sens du mouvement, on obtient :

$$2m \underbrace{\vec{g} \cdot \vec{e}_x}_0 + \underbrace{\vec{R} \cdot \vec{e}_x}_0 + \underbrace{\vec{T}_1 \cdot \vec{e}_x}_{T_1} = 2m \underbrace{\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_x}_{a_1} \quad \text{soit} \quad a_1 = \frac{T_1}{2m}.$$

2.18 b) Le principe fondamental appliqué au bloc B₂ donne $m\vec{g} + \vec{T}_2 = m\vec{a}_2$. En projetant cette relation suivant le sens du mouvement, on obtient :

$$m \underbrace{\vec{g} \cdot \vec{e}_y}_g + \underbrace{\vec{T}_2 \cdot \vec{e}_y}_{-T_2} = m \underbrace{\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_y}_{a_2} \quad \text{soit} \quad a_2 = g - \frac{T_2}{m}.$$

2.18 c) On a les relations :

$$a_1 = \frac{T_1}{2m} \quad \text{et} \quad a_2 = g - \frac{T_2}{m}.$$

Multiplions la première relation par $2m$, et la deuxième par m , puis additionnons-les. On trouve :

$$2ma_1 + ma_2 = T_1 + mg - T_2.$$

Comme $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$, on obtient $3ma_1 = mg$, soit $a_1 = a_2 = g/3$.

Fiche n° 3. Approche énergétique en mécanique

Réponses

3.1 ☐ (c)

3.2 a) $mg(\ell - y)$

3.2 b) $mg(x \sin(\alpha) - H)$

3.2 c) $-mgR \cos(\theta)$

3.2 d) $mgr(\cos(\psi) - 1) + E_0$

3.3 ☐ (b)

3.4 a) $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{k\ell_0^2}{2}$

3.4 b) ... $\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2$

3.4 c) $E_0 + k(x - \ell_0)^2$

3.5 a) $-h\ell$

3.5 b) $-hR\alpha$

3.5 c) $-(2a + 2b)h$

3.5 d) $-(a + b + c)h$

3.5 e) ☐ (b)

3.6 ☐ (c)

3.7 a) $1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}$

3.7 b) $0,65 \text{ rad} = 37^\circ$

3.8 a) $5,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3.8 b) $0,11 \text{ m}$

3.8 c) $2,0 \text{ m}$

3.9 a) $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$

3.9 b) $\zeta + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0$

3.10 a) ☐ (b)

3.10 b) ☐ (d)

3.10 c) ☐ (a)

3.10 d) ☐ (c)

3.11 a) ☐ 0

3.11 b) ☐ 0

3.11 c) ☐ 0

3.11 d) ☐ a

3.12 a) ☐ (a)

3.12 b) ☐ (a)

3.12 c) ☐ (a)

3.12 d) ☐ (b)

3.12 e) ☐ (b)

3.12 f) ☐ (b)

3.13 a) ☐ (a), ☐ (c) et ☐ (d)

3.13 b) ☐ (b)

3.13 c) ☐ (a), ☐ (c) et ☐ (d)

3.13 d) ☐ (a) et ☐ (c)

3.14 $33,6 \text{ m/s}$

Corrigés

3.2 a) L'axe est ici orienté vers le bas, on a donc $E_{\text{pp}}(y) = -mgy + K_1$. On veut $E_{\text{pp}}(\ell) = 0$, d'où $K_1 = mg\ell$. Finalement, on a $E_{\text{pp}}(y) = mg(\ell - y)$.

3.2 b) On peut raisonner de deux manières :

- La coordonnée verticale (axe de $\vec{g}$) z est liée à x par $z = x \sin(\alpha)$. On a donc $E_{\text{pp}} = mgx \sin(\alpha) + K_2$.
L'énergie potentielle étant nulle en $z = H$, on a $E_{\text{pp}}(x) = mg(x \sin(\alpha) - H)$.
- Dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, on a $\vec{g} = -g \sin(\alpha) \vec{e}_x - g \cos(\alpha) \vec{e}_y$.

On en déduit le travail élémentaire pour un déplacement selon x :

$$\delta W = -mg \sin(\alpha) dx = -d(mgx \sin(\alpha) + K_2) = -dE_{\text{pp}}.$$

On en déduit que $E_{\text{pp}}(x) = mgx \sin(\alpha) + K_2$.

L'énergie potentielle devant être nulle en S , qui correspond à $x = \frac{H}{\sin(\alpha)}$, on a $K_2 = -mgH$, d'où le résultat.

3.2 c) Dans la base polaire, l'accélération de la pesanteur s'écrit $\vec{g} = g \cos(\theta) \vec{e}_r - g \sin(\theta) \vec{e}_\theta$. Donc, le travail élémentaire pour un déplacement sur le cercle (selon $\vec{e}_\theta$) est :

$$\delta W = m \vec{g} \cdot d\vec{OM} = -mg \sin(\theta) R d\theta = -d(-mgR \cos(\theta) + K_3) = -dE_{\text{pp}}.$$

On a donc $E_{\text{pp}}(\theta) = -mgR \cos(\theta) + K_3$ et, comme on veut $E_{\text{pp}}(\pi/2) = 0$, on a $K_3 = 0$. Ainsi, on a :

$$E_{\text{pp}}(\theta) = -mgR \cos(\theta).$$

3.2 d) Fixons un axe (Oz) vertical ascendant avec O au centre du cercle. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit alors $E_{\text{pp}} = mgz + K_4$. Or, on a $z = r \cos(\psi)$, d'où $E_{\text{pp}} = mgr \cos(\psi) + K_4$.

La convention choisie ($E_{\text{pp}}(\psi = 0) = E_0$) entraîne que :

$$mgr \cos(0) + K_4 = E_0, \quad \text{d'où} \quad K_4 = E_0 - mgr.$$

Finalement, on trouve :

$$E_{\text{pp}} = mgr(\cos(\psi) - 1) + E_0.$$

3.4 a) L'axe est orienté vers le bas, la longueur du ressort s'identifie donc directement à la coordonnée y .

La force de rappel s'écrit $\vec{F} = -k(y - \ell_0) \vec{e}_y$. On en déduit donc (en calculant le travail élémentaire ou par intégration directe) que :

$$E_{\text{pe}}(y) = \frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 + C^{\text{te}}.$$

Or, on veut $E_{\text{pe}}(y = 0) = 0$, d'où $C^{\text{te}} = -\frac{1}{2}k\ell_0^2$. Ainsi, on a :

$$E_{\text{pe}}(y) = \frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{1}{2}k\ell_0^2.$$

3.4 b) On calcule d'abord la longueur ℓ du ressort en fonction de la coordonnée x . Un peu de trigonométrie donne $\cos(\beta) = \frac{x}{\ell}$, d'où $\ell = \frac{x}{\cos(\beta)}$. Par rapport à la coordonnée ℓ (mesurée le long de l'axe (OA)), l'énergie potentielle vaut donc :

$$E_{\text{pe}}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + C^{\text{te}}.$$

On a donc :

$$E_{\text{pe}}(x) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 + C^{\text{te}}.$$

On détermine alors la constante afin d'avoir $E_{\text{pe}}(A) = 0$. Lorsque le point M est en A, la longueur du ressort vaut $\ell(A) = \frac{L}{\sin(\beta)}$. On résout donc :

$$E_{\text{pe}}(\ell(A)) = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2 + C^{\text{te}} = 0 \quad \text{ce qui donne} \quad C^{\text{te}} = -\frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2.$$

Finalement, on trouve :

$$E_{\text{pe}}(x) = \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2.$$

3.4 c) La masse centrale est soumise aux forces de rappel des deux ressorts :

- La longueur du ressort de gauche vaut x . La force exercée par celui-ci sur la masse s'exprime donc comme $\vec{F}_g = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x$, d'où une énergie potentielle (à une constante près) $E_{p,g} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$.
- La longueur du ressort de droite vaut $2\ell_0 - x$. La force exercée par celui-ci sur la masse s'exprime donc comme $\vec{F}_d = k(2\ell_0 - x - \ell_0)\vec{e}_x = k(\ell_0 - x)\vec{e}_x$ (attention au signe devant k qui doit être cohérent), d'où une énergie potentielle (à une constante près) $E_{p,d} = \frac{1}{2}k(\ell_0 - x)^2$.

En additionnant les deux contributions, et en demandant que $E_{\text{pe}}(\ell_0) = E_0$, on obtient alors $E_{\text{pe}}(x) = E_0 + k(x - \ell_0)^2$.

3.5 a) Déterminons le travail élémentaire. On a :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -\frac{h}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \cdot d\vec{OM}.$$

Or, par construction, les vecteurs vitesse et déplacement élémentaire sont colinéaires, d'où :

$$\delta W = -h dOM.$$

Par intégration, on a donc :

$$W = \int_{AB} -h dOM = -h \int_{AB} dOM = -h\ell.$$

Les autres cas se calculent semblablement.

3.5 e) Si la force était conservative, son travail ne dépendrait que des points de départ et d'arrivée, et serait donc nul sur un chemin fermé (points de départ et d'arrivée confondus). Ce n'est pas le cas pour les chemins c) et d), la force n'est donc pas conservative.

3.6 On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point de départ et le point d'arrêt. L'entraînement précédent permet d'affirmer que le travail de la force de frottement vaut $-hd$. On a donc :

$$\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -hd \quad \text{donc} \quad d = \frac{mv_0^2}{2h}.$$

3.7 a) La masse n'est soumise qu'au poids, force conservative, et à la tension du fil qui ne travaille pas car elle reste orthogonale au mouvement. L'énergie mécanique se conserve donc entre le point de départ et le point de rebroussement.

- Au départ, $E_m = E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$ (on pose $z = 0$ pour la position initiale de la masse, et on prend $E_p(0) = 0$).
- Au moment du rebroussement, $E_m = E_p = mgz(\theta_0) = mg\ell(1 - \cos(\theta_0))$, car on a alors $z(\theta) = \ell - \ell \cos(\theta)$.

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ell(1 - \cos(\theta_0)) \quad \text{donc} \quad \cos(\theta_0) = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}.$$

3.8 a) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique entre le début et la fin de la chute libre, on a :

$$E_m(t_{\text{fin chute}}) - E_m(t_{\text{début chute}}) = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(H - \ell_0).$$

Les forces étant conservatives, l'énergie mécanique est conservée et on a donc :

$$v_0 = \sqrt{2g(H - \ell_0)} = \sqrt{2 \times 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times (2,0 \text{ m} - 0,30 \text{ m})} = 5,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3.8 b) La masse n'est soumise qu'à des forces conservatives : son poids, ainsi que la force de rappel du ressort. On peut donc appliquer la conservation de l'énergie mécanique entre la position d'arrivée sur le ressort ($z = \ell_0$) et la position d'altitude minimale ($z = z_m$), pour laquelle la vitesse s'annule. On a donc :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg\ell_0 = mgz_m + \frac{1}{2}k(z_m - \ell_0)^2.$$

Ainsi, après calcul, on trouve $\frac{1}{2}kz_m^2 + (mg - k\ell_0)z_m + \frac{1}{2}k\ell_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell_0 = 0$.

On ne demande qu'une réponse numérique, on peut donc passer aux valeurs numériques pour simplifier la résolution :

$$500z_m^2 - 290,2z_m + 25,4 = 0.$$

Cette équation possède deux solutions, $z_1 \approx 0,47 \text{ m}$ et $z_2 \approx 0,11 \text{ m}$. La première solution correspond à une position supérieure en altitude à la position initiale, et n'est donc pas celle qui nous intéresse. On retient donc $z_m = 0,11 \text{ m}$.

3.8 c) La masse n'étant soumise qu'à des forces conservatives, elle revient en $x = \ell_0$ avec la même vitesse qu'elle avait en arrivant, à savoir v_0 . Elle atteint donc une altitude maximale quand sa vitesse s'annule en $z = H$.

3.9 a) On choisit un axe vertical descendant de manière à pouvoir identifier z à la distance OM, qui est la longueur du ressort.

Afin de déterminer l'équation différentielle, on souhaite appliquer le théorème de la puissance cinétique. Or :

- la puissance du poids vaut $m\vec{g} \cdot \vec{v} = mg\dot{z}$ (axe descendant) ;
- la puissance de la force de rappel vaut $-k(z - \ell_0)\vec{e}_z \cdot \vec{v} = -k(z - \ell_0)\dot{z}$;
- la puissance de la force de frottements fluides vaut $-\alpha\vec{v} \cdot \vec{v} = -\alpha\dot{z}^2$.

Le théorème de la puissance cinétique donne alors :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 \right) = m\dot{z}\ddot{z} = mg\dot{z} - k(z - \ell_0)\dot{z} - \alpha\dot{z}^2.$$

D'où finalement : $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$.

3.9 b) On détermine la position d'équilibre en projetant la première loi de Newton sur l'axe vertical descendant :

$$mg - k(z_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{donc} \quad z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

On obtient $z_{\text{eq}} > \ell_0$, ce qui est physiquement cohérent.

On pose donc $\zeta = z - z_{\text{eq}}$. En réinjectant dans l'équation différentielle obtenue précédemment, on obtient :

$$\ddot{\zeta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\left(\zeta + \ell_0 + \frac{mg}{k}\right) = g + \frac{k\ell_0}{m} \quad \text{donc} \quad \ddot{\zeta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0.$$

On peut également obtenir cette équation en écrivant la force de rappel par rapport à la variable ζ et en en déduisant l'énergie potentielle associée.

3.10 a) Au voisinage de $x = 0^+$, la fonction énergie potentielle est équivalente à β/x^2 . Ici, la fonction représentée par le graphe tend vers $-\infty$ en 0, on a donc nécessairement $\beta < 0$.

Pour $x \rightarrow +\infty$, la fonction énergie potentielle est équivalente à α/x . Ici, la fonction représentée par le graphe tend vers 0^+ en $+\infty$, on a donc nécessairement $\alpha > 0$.

Ce potentiel est physiquement impossible car $E_p(x \rightarrow 0^+) \rightarrow -\infty$: l'énergie potentielle n'est pas bornée inférieurement, on pourrait donc théoriquement utiliser ce potentiel pour extraire une quantité infinie d'énergie.

3.11 a) La position d'équilibre stable correspond à l'état qui minimise l'énergie potentielle.

- Déterminons le minimum de l'énergie potentielle $E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta))$ en cherchant la valeur θ_{eq} telle que :

$$\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{\text{eq}}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) > 0.$$

La première égalité donne $\frac{dE_p}{d\theta}(\theta_{\text{eq}}) = mg\ell \sin(\theta_{\text{eq}}) = 0$ et donc $\theta_{\text{eq}} \equiv 0 \text{ } [\pi]$.

Finalement, en tenant compte de $\frac{d^2E_p}{d\theta^2}(\theta_{\text{eq}}) > 0$, on trouve $\theta_{\text{eq}} \equiv 0 \text{ } [2\pi]$.

- On aurait pu remarquer que les minima de $mg\ell(1 - \cos(\theta))$ correspondent aux maxima de $\cos(\theta)$, qui sont bien les $\theta_{\text{eq}} \equiv 0 \text{ } [2\pi]$.

3.11 b) On dérive l'énergie potentielle, en écrivant :

$$\frac{dE_p}{dz} = \kappa z + \lambda z^3.$$

L'équation $\frac{dE_p}{dz} = 0$ a alors trois solutions : $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{-\frac{\kappa}{\lambda}}$ et $z_3 = -\sqrt{-\frac{\kappa}{\lambda}}$.

Il s'agit des positions d'équilibre de ce potentiel.

On dérive une seconde fois afin d'étudier la stabilité. On a $\frac{d^2E_p}{dz^2} = \kappa + 3\lambda z^2$.

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2E_p}{dz^2}(z = z_1) &= \kappa > 0 \\ \frac{d^2E_p}{dz^2}(z = z_2) &= \kappa + 3\lambda\left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) = -2\kappa < 0 \\ \frac{d^2E_p}{dz^2}(z = z_3) &= \kappa + 3\lambda\left(-\frac{\kappa}{\lambda}\right) = -2\kappa < 0. \end{aligned}$$

Seule $z_1 = 0$ est une position d'équilibre stable.

3.11 c) On calcule la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{dx} = 2U_0\beta x e^{\beta x^2},$$

qui montre que $\frac{dE_p}{dx}$ s'annule pour $x = 0$, qui est donc une position d'équilibre.

Pour étudier sa stabilité, on dérive une seconde fois :

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = 2U_0\beta(1 + 2\beta x^2)e^{\beta x^2},$$

qui, en $x = 0$, vaut $2U_0\beta > 0$. Cette position d'équilibre est donc bien stable.

3.11 d) On calcule la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{d\phi} = 2E_0 \sin(\phi - a) \cos(\phi - a).$$

Ainsi, $\frac{dE_p}{d\phi}$ s'annule pour $\phi = a$ et $\phi = a + \frac{\pi}{2}$, qui sont les positions d'équilibre dans l'intervalle $[0, \pi[$.

Afin d'étudier leur stabilité, on dérive une seconde fois :

$$\frac{d^2E_p}{d\phi^2} = 2E_0(\cos^2(\phi - a) - \sin^2(\phi - a)).$$

- On calcule ensuite $\frac{d^2E_p}{d\phi^2}(\phi = a) = 2E_0$. Ce dernier terme étant positif, la position d'équilibre $\phi = a$ est donc stable.
- Pour l'autre position d'équilibre, on a $\frac{d^2E_p}{d\phi^2}(\phi = a + \pi/2) = -2E_0$. Cette dérivée seconde étant négative, la position d'équilibre $\phi = a + \pi/2$ est instable.

3.13 d) Le mouvement entre x_2 et x_3 correspond à un état lié : c'est un mouvement dans un puits de potentiel. Comme le mouvement est à un degré de liberté, il est également périodique. Cependant, les positions extrêmes étant éloignées de la position moyenne (d'équilibre x_3^*), ce mouvement n'est pas harmonique.

3.14 On a vu précédemment que les trajectoires correspondant à l'énergie mécanique E_3 sont des états de diffusion, le point matériel peut donc bien s'échapper à l'infini.

Le mouvement du point étant conservatif, on applique la conservation de l'énergie mécanique entre le départ et « l'arrivée » à l'infini. On a :

$$E_3 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad \text{donc} \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2E_3}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1\,300 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{2,3 \text{ kg}}} = 33,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Fiche n° 4. Moment cinétique

Réponses

4.1 a)	$-\ \vec{P}\ \cos \theta$	4.5	$\frac{1}{3} M L^2$
4.1 b)	$\ \vec{N}\ \cos(\gamma + \beta)$	4.6	$\frac{1}{12} M L^2$
4.1 c)	$\ \vec{R}\ \sin(\theta + \alpha)$	4.7 a)	$-\ell F \sin \alpha \cos \alpha$
4.1 d)	$-\ \vec{T}\ \cos(\gamma)$	4.7 b)	0
4.1 e)	$\ \vec{N}\ \cos(\beta)$	4.8 a)	$\frac{mgL}{2} \cos \alpha \vec{e}_z$
4.1 f)	$\ \vec{N}\ \sin(\beta)$	4.8 b)	$-mg\left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha\right) \vec{e}_z$
4.2 a)	$\vec{P} = -\ \vec{P}\ \vec{e}_y$	4.8 c)	$-mg\left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha\right) \vec{e}_z$
4.2 b)	$\ \vec{P}\ (-\sin(\theta) \vec{e}_r - \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$	4.9 a)	$\frac{a}{2} \vec{e}_X + a \vec{e}_Y$
4.2 c)	$-\ \vec{T}\ \vec{e}_y$	4.9 b)	$\frac{a}{2} \vec{e}_X + \frac{a}{3} \vec{e}_Y$
4.2 d)	$\vec{T} = \ \vec{T}\ (-\cos(\gamma) \vec{e}_r + \sin(\gamma) \vec{e}_\theta)$	4.9 c)	$P(-\sin \alpha \vec{e}_X - \cos \alpha \vec{e}_Y)$
4.2 e)	$\ \vec{R}\ (\cos(\theta + \alpha) \vec{e}_x + \sin(\theta + \alpha) \vec{e}_y)$	4.9 d)	$F(-\cos \alpha \vec{e}_X + \sin \alpha \vec{e}_Y)$
4.2 f)	$\ \vec{R}\ (\cos(\alpha) \vec{e}_r + \sin(\alpha) \vec{e}_\theta)$	4.9 e)	$aF\left(\frac{\sin \alpha}{2} + \cos \alpha\right) \vec{e}_z$
4.2 g)	$\ \vec{N}\ (-\sin(\beta + \gamma) \vec{e}_x + \cos(\beta + \gamma) \vec{e}_y)$	4.9 f)	$aP\left(-\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{3}\right) \vec{e}_z$
4.2 h)	$\ \vec{N}\ (\cos(\beta) \vec{e}_r + \sin(\beta) \vec{e}_\theta)$	4.9 g)	$\frac{3P - 6F}{3F + 2P}$
4.3	la Terre		
4.4	$m r v \sin(\alpha) \vec{e}_z$		

Corrigés

4.1 a) On calcule $\vec{P} \cdot \vec{e}_\theta = \|\vec{P}\| \times \|\vec{e}_\theta\| \times \cos(\pi + \theta) = -\|\vec{P}\| \cos \theta$.

4.1 c) On calcule $\vec{R} \cdot \vec{e}_y = \|\vec{R}\| \times \|\vec{e}_y\| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha)\right) = \|\vec{R}\| \sin(\theta + \alpha)$.

4.1 d) On calcule $\vec{T} \cdot \vec{e}_r = \|\vec{T}\| \times \|\vec{e}_r\| \times \cos(\pi + \gamma) = -\|\vec{T}\| \cos(\gamma)$.

4.1 f) On calcule $\vec{N} \cdot \vec{e}_\theta = \|\vec{N}\| \times \|\vec{e}_\theta\| \times \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \|\vec{N}\| \sin(\beta)$.

4.3 Commençons par tout remettre dans les bonnes unités pour pouvoir calculer le produit $m \times r \times v$, qui correspond au moment cinétique puisque le rayon vecteur est bien perpendiculaire à la vitesse pour une orbite circulaire.

	Masse en kg	Distance en m	Vitesse en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	Moment cinétique en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Mercure	3×10^{23}	6×10^{10}	5×10^4	$3 \times 6 \times 5 \times 10^{37} = 9 \times 10^{38}$
Vénus	5×10^{24}	$1,1 \times 10^{11}$	$3,5 \times 10^4$	$5 \times 1,1 \times 10^{39} \times \frac{7}{2} \approx 2 \times 10^{40}$
Terre	6×10^{24}	$1,5 \times 10^{11}$	3×10^4	$6 \times \frac{3}{2} \times 3 \times 10^{39} = 2,7 \times 10^{40}$
Mars	6×10^{23}	$2,3 \times 10^{11}$	$2,4 \times 10^4$	$\leq 6 \times 10^{38} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \approx 3,7 \times 10^{39}$

C'est bien la Terre qui gagne finalement le concours du plus grand moment cinétique.

4.4 Le vecteur vitesse s'écrit dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ comme $\vec{v} = v(\cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta)$. Le produit vectoriel avec $\vec{\text{OM}}$ s'écrit alors :

$$\vec{\text{OM}} \wedge m \vec{v} = r \vec{e}_r \wedge m v (\cos \alpha \vec{e}_r + \sin \alpha \vec{e}_\theta) = m r v \sin \alpha \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta.$$

4.5 On calcule :

$$\begin{aligned} I_\Delta &= \rho \int_0^L x^2 dx \times \int_0^e dy \times \int_0^h dz \\ &= \frac{M}{Lhe} \int_0^L x^2 dx \times e \times h \\ &= \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx \\ &= \left[\frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{3} ML^2. \end{aligned}$$

4.6 On calcule $I_\Delta = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \left[\frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \times 2 \frac{L^3/8}{3} = \frac{1}{12} ML^2$.

4.7 a) D'une part, on commence par déterminer l'expression du vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. On a ici, en notant F la norme du vecteur : $\vec{F} = F(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y)$.

D'autre part, en notant M le point d'action de $\vec{F}$, on a $\vec{\text{OM}} = \ell \sin \alpha \vec{e}_y$. On peut alors calculer :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{\text{OM}} \wedge \vec{F} = \ell \sin \alpha \vec{e}_y \wedge F(\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_y) = \ell F \sin \alpha \cos \alpha (-\vec{e}_z).$$

4.8 a) Dans cette configuration, le bras de levier vaut $\frac{L}{2} \cos \alpha$ et le point fait tourner dans le sens trigonométrique autour de A, de sorte que $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \frac{mgL}{2} \cos \alpha \vec{e}_z$.

4.8 b) Cette fois-ci, le poids fait tourner dans le sens horaire autour de O avec un bras de levier complémentaire du précédent de $\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha$, d'où le résultat.

4.8 c) Même chose que précédemment, I et O étant à la verticale l'un de l'autre.

4.9 a) On décompose $\vec{\text{OB}} = \vec{\text{OI}} + \vec{\text{IB}} = \frac{a}{2} \vec{e}_x + a \vec{e}_y$.

.....
4.9 b) On décompose $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IG} = \frac{a}{2} \overrightarrow{e_X} + \frac{a}{3} \overrightarrow{e_Y}$.

4.9 c) On a $\vec{P} = (\vec{P} \cdot \overrightarrow{e_X}) \overrightarrow{e_X} + (\vec{P} \cdot \overrightarrow{e_Y}) \overrightarrow{e_Y} = P \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \overrightarrow{e_X} + \cos(\pi + \alpha) \overrightarrow{e_Y} \right] = P(-\sin \alpha \overrightarrow{e_X} - \cos \alpha \overrightarrow{e_Y})$.

4.9 d) On a $\vec{F} = (\vec{F} \cdot \overrightarrow{e_X}) \overrightarrow{e_X} + (\vec{F} \cdot \overrightarrow{e_Y}) \overrightarrow{e_Y} = F \left[\cos(\pi + \alpha) \overrightarrow{e_X} + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \overrightarrow{e_Y} \right] = F(-\cos \alpha \overrightarrow{e_X} + \sin \alpha \overrightarrow{e_Y})$.

4.9 g) Pour qu'il y ait équilibre, la somme des deux moments doit s'annuler. Les deux étant suivant $\vec{e_z}$, on doit avoir :

$$aF \left(\frac{\sin \alpha}{2} + \cos \alpha \right) + aP \left(-\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{3} \right) = 0.$$

En divisant par $a \cos \alpha$, il vient :

$$\frac{F \tan \alpha}{2} + F - \frac{P}{2} + \frac{P \tan \alpha}{3} = 0.$$

On obtient donc :

$$\tan \alpha = \frac{\frac{P}{2} - F}{\frac{F}{2} + \frac{P}{3}} = \frac{3P - 6F}{3F + 2P}.$$

.....