

OPÉRATIONS SUR LES VECTEURS.

I. Produit scalaire

Définition.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, du plan ou de l'espace.

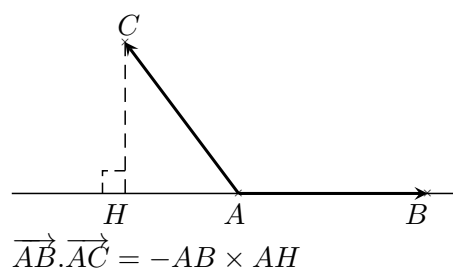
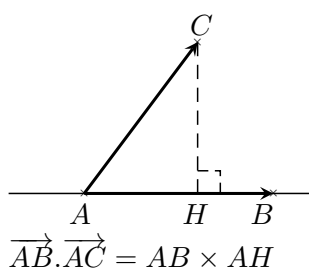
On note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est le nombre défini par :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls ;} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 & \text{si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul.} \end{cases}$$

Remarque : par analogie au produit numérique, on note $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, et on a aussi $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

1) Interprétations géométriques

A , B et C sont trois points distincts, on construit H le projeté orthogonal de C sur (AB) :



En particulier, si $\vec{AB}$ est un vecteur unitaire (de norme 1), alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \pm AH$, on peut donc voir un lien entre le produit scalaire et la projection orthogonale.

Propriété fondamentale.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan ou de l'espace :

- ★ $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ si l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est aigu, et $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ si l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est obtus.
- ★ $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- ★ $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ soit $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit scalaire est

- ★ symétrique : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- ★ bilinéaire : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel λ ,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ et } \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\text{linéarité à droite})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \text{ et } (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\text{linéarité à gauche})$$

En particulier : $\vec{BA} \cdot \vec{AC} = -\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

Remarque : on peut déduire les « identités remarquables » suivantes :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 =$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) =$$

3) Produit scalaire et coordonnées

Théorème.

★ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

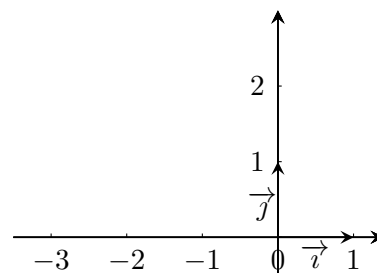
Alors $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$.

★ Dans l'espace, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

Alors $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$.

(Le résultat ne dépend pas de la base choisie, mais elle doit être orthonormale.)

Exemple : dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, calculer $\vec{u} \cdot \vec{i}$ et $\vec{u} \cdot \vec{j}$.



Propriété.

Dans une base orthonormée du plan $(\vec{i}, \vec{j})$, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit : $\boxed{\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j}}$.

Dans une base orthonormée de l'espace $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\boxed{\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k}) \vec{k}}$.

En effet, en notant (x, y) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{i} =$

$=$

$=$

4) Utilisations du produit scalaire

a. déterminer une orthogonalité de vecteurs ou perpendicularité de droites dans le plan

Exemple : dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-1, -2)$, $B(5, 0)$, $C(3, -1)$ et $D(2, 2)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ? et (AD) et (BD) ?



Méthodes :

- ★ pour savoir si deux vecteurs sont orthogonaux, on calcule le produit scalaire : il est nul si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux ;
- ★ pour étudier la perpendicularité de droites dans le plan : (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

b. calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée (exprimer un vecteur dans une base)

Exemple : dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
Vérifier que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée, et déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans cette nouvelle base.



Méthode : pour obtenir les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, on peut calculer les produits scalaires du vecteur avec chacun des vecteurs de la base : $\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{w} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{w} \cdot \vec{k}) \vec{k}$.

c. déterminer un angle non orienté

Exemple : déterminer le produit scalaire de $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$, en déduire l'angle non orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.



Méthodes :

- ★ pour déterminer l'angle non-orienté entre deux vecteurs non nuls à partir des coordonnées, on peut calculer leurs normes, et le produit scalaire, puis utiliser la formule $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.
- ★ pour déterminer l'angle $\widehat{BAC}$, on trouve son cosinus avec : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC}$.

II. Déterminant dans le plan

Définition.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté.

On note $\det(\vec{u}, \vec{v})$ le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ défini par :

$$\begin{cases} \det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls ;} \\ \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 & \text{si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} \text{ est nul.} \end{cases}$$

Remarque : on peut aussi noter $\det(\vec{u}, \vec{v}) = [\vec{u}, \vec{v}]$.

1) Interprétations géométriques

Propriété fondamentale.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Propriété.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

$$\star -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leq \det(\vec{u}, \vec{v}) \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

$$\star \det(\vec{u}, \vec{v}) = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \text{ si et seulement si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}$$

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le déterminant est

$$\star \text{ anti-symétrique : pour tous vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v}, \text{ on a } \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}).$$

$$\star \text{ bilinéaire : pour tous vecteurs } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w}, \text{ et tout réel } \lambda,$$

$$\dots\dots\dots (\text{linéarité à droite})$$

$$\dots\dots\dots (\text{linéarité à gauche})$$

Exemple :

$$\det((2\vec{u} + 3\vec{v}), (-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v})) = \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

$$= \dots \det(\vec{u}, \vec{v})$$

3) Expression du déterminant avec les coordonnées

Théorème.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.

Alors $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'}$ (ce nombre est aussi noté $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$).

Exemple : on se place dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$, et on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

4) Utilisations du déterminant dans le plan

a. déterminer une colinéarité, un parallélisme, un alignement de points

Exemple : dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note $A(-2, -2)$, $B(1, -1)$ et $C(3, -\frac{1}{3})$, montrer que A, B et C sont alignés.



Méthodes :

- ★ pour savoir si deux vecteurs du plan sont colinéaires, on calcule leur déterminant : les vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.
- ★ A, B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires) ;
- ★ (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires).

b. déterminer un angle orienté

Exemple : calculer produit scalaire et déterminant de $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, et en déduire une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

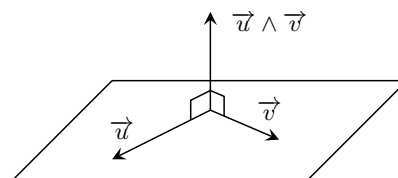


Méthodes :

- ★ on peut déterminer l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls à partir des coordonnées : on calcule le produit scalaire, qui donne l'angle au signe près, et on calcule le déterminant qui nous donne le signe.
- ★ pour déterminer l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$.

III. Produit vectoriel dans l'espace

Le produit vectoriel dans l'espace est une opération entre deux vecteurs qui a pour résultat un autre vecteur.



Définition.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.

On note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est le vecteur défini ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires : } \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \\ \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires : } \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ est le vecteur} \\ \quad \text{de norme } \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \\ \quad \text{orthogonal à } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ \quad \text{de sens tel que } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ soit une base directe.} \end{array} \right.$$

Remarque : dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, on peut aussi écrire $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \vec{w}$ où $\vec{w}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemple : $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, déterminer la norme, la direction, le sens de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ en déduire ses coordonnées.

1) Interprétations géométriques

Propriété fondamentale : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Remarques :

★ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ représente ...

★ si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe, $\vec{i} \wedge \vec{j} = \dots$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \dots$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \dots$.

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le produit vectoriel est

★ : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{v} \wedge \vec{u} = \dots$

★ bilinéaire : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout réel λ ,

..... (linéarité à droite)

..... (linéarité à gauche)

Exemple : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe, on pose : $\vec{u} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{k}$.

Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} =$

3) Expression du produit vectoriel avec les coordonnées

Théorème: expression du produit vectoriel avec les coordonnées.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, ayant pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale directe.

$$\text{Alors } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}, \text{ autrement dit } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$



Exemple et méthode(s) : dans une base orthonormée directe, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

4) Utilisations du produit vectoriel

a. montrer que deux vecteurs de l'espace sont colinéaires, que 3 points sont alignés

Exemple : dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $A(1, -3, 0)$ et $B(-2, 1, 1)$ et $C(2, y, z)$. Déterminer y et z pour que A , B et C soient alignés.



Méthodes :

b. construire une base orthogonale ou orthonormale directe

Exemple : dans une base orthonormée, on donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifions qu'ils sont orthogonaux, et déterminons un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthogonale directe, puis construisons une base orthonormée directe à partir de cette base.



Méthode : pour construire une base à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, on calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

- ★ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.
- ★ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est ...
- ★ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, alors ...

IV. Déterminant dans l'espace ou produit mixte**Définition.**

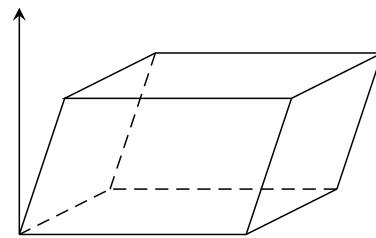
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

On note $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le **déterminant** (ou **produit mixte**) des trois vecteurs, c'est le nombre défini par $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

Exemple : calculer le produit mixte des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Interprétations géométriques

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume (orienté) du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



Propriété fondamentale.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

En effet,

2) Règles de calcul algébrique

Propriété.

Le déterminant est

★ antisymétrique : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -\det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$$

★ trilineaire : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{x}$, et tout réel λ ,

$$\det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) = \det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}) + \det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}) \quad \text{et} \quad \det(\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

.....

3) Expression du déterminant avec les coordonnées

Théorème.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe.

Alors $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - zy'x'' - z'y''x - z''yx'$.

Ce nombre est aussi noté $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.

Méthode pratique de calcul : règle de Sarrus.

Comptés positivement :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \\ z & z'' \end{vmatrix}$$

Comptés négativement :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \\ z & z'' \end{vmatrix}$$

Exemple : calculer le produit mixte des vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4) Utilisations du produit mixte

a. montrer que 3 vecteurs sont coplanaires, ou 4 points coplanaires

Exemple : les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?



Méthodes :

- ★ trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul
- ★ A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\vec{AB}, \vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.

b. calculer un volume de parallélépipède

Exemple : dans une base orthonormée directe, on définit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer le volume du parallélépipède formé sur ces vecteurs.