

CORRIGÉ DU DM N°2

Correction 1.

1. $2 \times 5 = 10$ et $3 \times 4 = 12 \neq 10$ donc les coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base du plan.

2. On note x et y les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Alors $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

$$\text{Or } \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \iff \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + y \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \iff \begin{cases} 2x + 4y = 4 & (1) \\ 3x + 5y = 9 & (2) \end{cases}.$$

D'après (1), $x = 2 - 2y$ donc dans (2), $3(2 - 2y) + 5y = 9$

$$6 - 6y + 5y = 9$$

$$-y = 3$$

$$y = -3$$

Donc $x = 2 - 2 \times (-3)$ donc $x = 8$.

Les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

3. (a) $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = -\vec{u} + \vec{v}$ donc A a pour coordonnées $(-1; 1)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

(b) Les coordonnées (x, y) de A dans ce repère vérifient $\vec{OA} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

$$\text{Or } \vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ 2 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \text{ donc } x \text{ et } y \text{ sont les solutions du système } \begin{cases} 2x + 4y = 0 & (1) \\ 3x + 5y = 5 & (2) \end{cases}$$

D'après (1), $x = -2y$ donc dans (2) $-6y + 5y = 5$

$$-y = 5$$

$$y = -5$$

Donc $x = 10$.

Les coordonnées de A dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ sont $(10, -5)$.

Correction 2.



parenthèses indispensables !!!

$$\begin{aligned} 1. \quad A(x) &= \frac{1 - (1 - 2 \sin^2(x))}{2 \sin(x) \cos(x)} + \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1 + 2 \cos^2(x) - 1} \\ &= \frac{2 \sin^2(x)}{2 \sin(x) \cos(x)} + \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{2 \cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= 2 \tan(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \cos(4x) &= \cos(2 \times 2x) \\ &= 2 \cos^2(2x) - 1 \\ &= 2 \left(2 \cos^2(x) - 1 \right)^2 - 1 \\ &= 2 \left(4 \cos^4(x) - 4 \cos^2(x) + 1 \right) - 1 \\ &= 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} &= \frac{\cos(x)\sin(3x) - \sin(x)\cos(3x)}{\sin(x)\cos(x)} \\
&= \frac{\sin(3x-x)}{\sin(x)\cos(x)} \quad (\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \text{ avec } a=3x \text{ et } b=x) \\
&= \frac{\sin(2x)}{\sin(x)\cos(x)} \\
&= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)\cos(x)} \\
&= \boxed{2}
\end{aligned}$$

Correction 3.

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or } 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi &\iff 3x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\
&\iff 3x = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} + 2k\pi \\
&\iff x = \frac{\pi}{36} + 2k\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Et } 3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi &\iff 3x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\
&\iff 3x = -\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} + 2k\pi \\
&\iff x = -\frac{5\pi}{36} + 2k\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres s'écrivant $\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $-\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ avec k entier relatif.

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} &\iff \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
&\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que } x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{6} + k\pi \\
&\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{\pi}{30} + k\pi \quad \left(\text{car } \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi}{30} - \frac{6\pi}{30} = -\frac{\pi}{30}\right)
\end{aligned}$$

Les solutions sont tous les angles s'écrivant $-\frac{\pi}{30} + k\pi$ avec k un entier relatif.

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad \sin(x) - \sin(3x) = 0 &\iff \sin(x) = \sin(3x) \\
&\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que } x = 3x + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - 3x + 2k\pi \\
&\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que } -2x = -2k\pi \text{ ou } 4x = \pi + 2k\pi \\
&\iff \text{il existe } k \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}
\end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres s'écrivant $-k\pi$ ou $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ avec k entier relatif.