

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS, STRUCTURE.

Les fonctions ont été introduites en mathématiques vers la fin du XVII^e siècle par Leibniz, puis ont été développées entre autres par Euler, Cauchy ... La définition a évolué au fil du temps, et l'étude des fonctions forme le domaine de l'*analyse*.

Définition, vocabulaire et notation.

- Une **fonction** f est définie par la donnée de deux éléments :
 - ★ un procédé pour déterminer une image (en général un calcul à faire) ;
 - ★ l'ensemble des nombres pour lesquels on peut appliquer ce procédé, c'est l'**ensemble de définition**, noté en général $\mathcal{D}_f$.
- On pourra utiliser la notation suivante : $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto f(x)$$
- $f(x)$ est l'**image** du réel x par la fonction f .
 Soit y dans $\mathbb{R}$, si il existe un réel x dans $\mathcal{D}_f$ tel que $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y par f .

Exemples :

- ★ la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3$.

L'image de -1 par f est

7 a pour antécédents car

- ★ la fonction g dont l'expression est $g(x) = \frac{2}{x-4}$ est définie sur $\mathcal{D}_g =]-\infty, 4[\cup]4, +\infty[$ car diviser deux nombres est toujours possible sauf lorsque le diviseur est nul, et ici $x - 4$ s'annule lorsque $x = 4$.

I. Rappels sur les intervalles

- **Un intervalle** est un ensemble de nombres réels compris entre deux valeurs.

Par exemple $x \in [-\frac{3}{7}; 7,4[$ signifie x : $\longrightarrow$

$] -\infty; 3]$ est l'ensemble des nombres : $\longrightarrow$

- ★ L'intervalle $[a; b]$ est dit **fermé** car ses **bornes** a et b sont comprises dans l'intervalle.

On l'appelle aussi un **segment**. $a \dots [a, b]$ se lit « a appartient au segment $[a, b]$ ».

- ★ L'intervalle $]a; b[$ est dit **ouvert** car ses bornes ne sont pas comprises dans l'intervalle : $a \dots]a; b[$, $b \dots]a; b[$.

• Intersection et réunion :

Si I et J sont deux ensembles de nombres, l'**intersection** de I et J est l'ensemble des nombres qui sont à la fois dans I et dans J , on le note $I \cap J$. « I inter J »

La **réunion** de I et de J , notée $I \cup J$ (« I union J »), est l'ensemble des nombres qui sont dans I , ou dans J ou dans les deux à la fois.

$I = [3; 7]$ et $J =]-2; 4[$: $\longrightarrow$

- **Notation $\mathbb{R}$** : on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire $\boxed{\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[}$.

Alors $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ peut se noter $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (« $\mathbb{R}$ privé de 0 ») ou $\mathbb{R}^*$ (« $\mathbb{R}$ étoile »).

De même, $] -\infty; -4[\cup]-4; 3[\cup]3; +\infty[$ se note $\mathbb{R} \setminus \{-4; 3\}$ et se lit « ensemble des nombres réels, privé de -4 et 3 ».

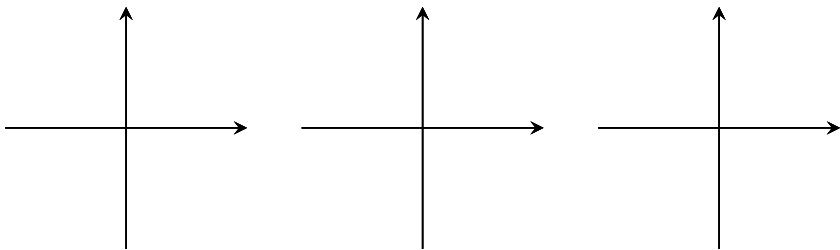
On note également $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ « ...

$\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$, « .

II. Fonctions usuelles connues

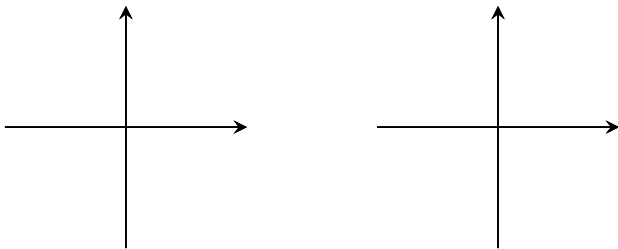
fonctions de référence :

★ puissances :
.....



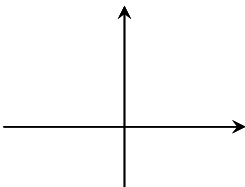
Rappel : $x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ facteurs}}$

★ inverses de puissances :
.....



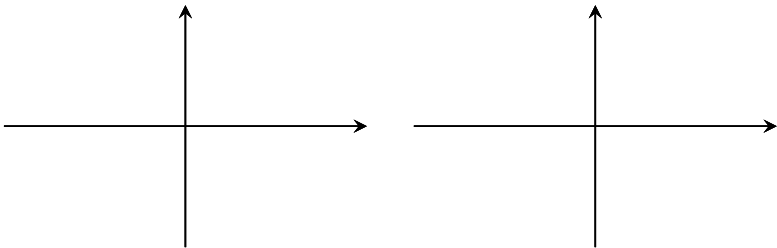
Rappel : $x^{-n} = \frac{1}{\underbrace{x \times x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ facteurs}}}$

★ racine carrée :
.....

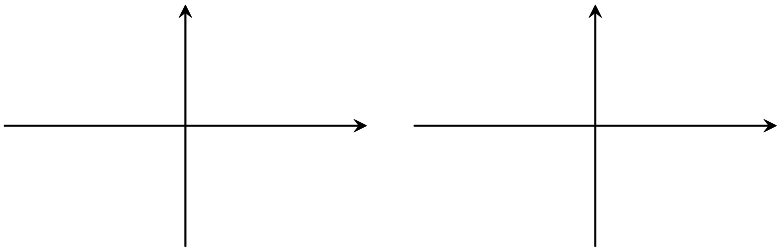


Rapports : si $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$ et $\sqrt{x^2} = x$ et si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$

★ cosinus et sinus :
.....



★ logarithme et exponentielle :
.....
.....



grandes familles de fonctions usuelles :

★ polynômes :
.....

★ fractions rationnelles :
.....
.....

III. Construction de nouvelles fonctions

1) Opérations usuelles

On peut former de nouvelles fonctions en ajoutant, soustrayant ... des fonctions usuelles. Par exemple, $f : x \mapsto x^2 + \frac{1}{x}$ est la somme de la fonction carré et de la fonction inverse.

Définition.

Soient u et v deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$, on appelle :

- **somme** de u et v la fonction $u + v : \mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto u(x) + v(x)$$
- **soustraction** de u par v la fonction $u - v : \mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto u(x) - v(x)$$
- **produit** de u et v la fonction $uv : \mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto u(x) \times v(x)$$
- **quotient** de u par v la fonction $\frac{u}{v} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathcal{D} = \mathcal{D}_u \cap \{x \in \mathcal{D}_v \mid v(x) \neq 0\}$.

$$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$$

Exemples :

- $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$:

- $g(x) = \frac{\ln(x)}{2x-8}$:

2) Composition de fonctions

Définition.

Soient u et v deux fonctions.

On appelle **composée de u par v** la fonction notée $v \circ u$ d'expression $v \circ u(x) = v(u(x))$.

Elle est définie pour tous les x de $\mathcal{D}_u$ tels que $u(x) \in \mathcal{D}_v$: $\mathcal{D}_{v \circ u} = \{x \in \mathcal{D}_u \mid u(x) \in \mathcal{D}_v\}$.

Exemples :

- $u(x) = 2x - 7$ et $v(x) = e^x$.

$$\begin{array}{ccccc} x & \mapsto & 2x - 7 & \mapsto & e^{2x-7} \\ & & X & \mapsto & e^X \end{array}$$

- $u(x) = 2x - 7$ et $w(x) = \frac{1}{x}$: déterminer les ensembles de définition et les expressions de $u \circ w$ et $w \circ u$.

- décomposer les fonctions suivantes en deux fonctions usuelles.

$$\star f(x) = \ln(x^2 + 3)$$

$$\star g(x) = \frac{1}{-3x + 5}$$

$$\star h(x) = -\frac{4}{x^2} + 2$$

Remarque importante : même si $u \circ v$ et $v \circ u$ existent toutes les deux, elles ne sont pas égales.

3) Quelques cas particuliers

Propriété.

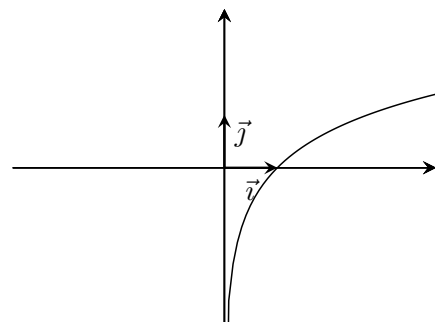
Soit a un nombre non nul.

- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x) + a$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
- Le graphe de la fonction $x \mapsto f(x + a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto af(x)$, il faut multiplier les ordonnées des points de $\mathcal{C}_f$ par a .
- Pour représenter graphiquement la fonction $x \mapsto f(ax)$, il faut diviser les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ par a .

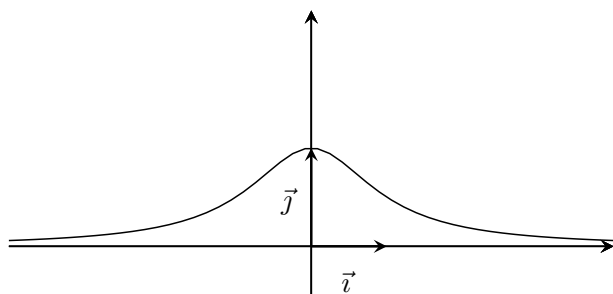
Exemples :

1. Voilà ci-contre le graphique de la fonction $\ln$.

Tracer dans le même repère les allures des fonctions $x \mapsto \ln(x + 3)$ (en bleu) et $x \mapsto \ln(x) + 2$ (en rouge).



2.



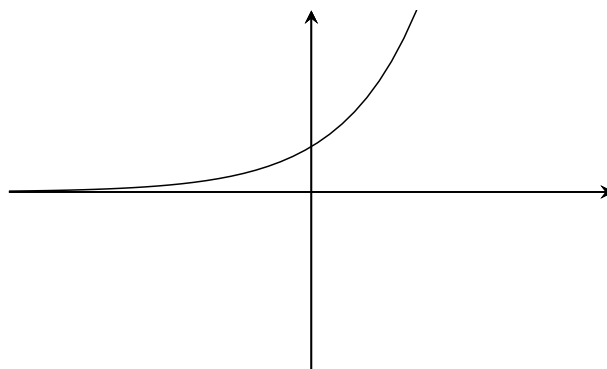
Ci-contre est représentée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.
Tracer sur le même repère les allures des fonctions
 $x \mapsto \frac{1}{(3x)^2+1}$ (en bleu) et $x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$ (en rouge).

3. La courbe de $x \mapsto e^{-x}$ est

.....

La courbe de $x \mapsto -e^x$ est

.....



IV. Déterminer les ensembles de définition

1) Méthode

1. Mettre en évidence la structure de la fonction : opérations et fonctions usuelles qui interviennent, nommer ces fonctions :

par exemple, « $f = \frac{f_1 \times f_2}{f_3}$ avec $f_1(x) = \dots$, $f_2(x) = \dots$ et $f_3(x) = \dots$ »

2. Donner les ensembles de définition de chacune des fonctions et les conditions induites par les opérations :

► formes $u + v$ ou $u - v$ ou $u \times v$: $\star \mathcal{D}_u = \dots$
 $\star \mathcal{D}_v = \dots$

► forme $\frac{u}{v}$: $\star \mathcal{D}_u = \dots$
 $\star \mathcal{D}_v = \dots$
 $\star v(x) \neq 0 \iff \dots$

*penser au raccourci
fractions rationnelles*

► forme $v \circ u$: $\star \mathcal{D}_u = \dots$
 $\star (\mathcal{D}_v = \dots \text{ ne sert pas dans l'ensemble final, juste pour ici})$
 $u(x) \in \mathcal{D}_v \iff \dots$

3. Conclure en tenant compte de toutes les restrictions : « Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \dots}$. »

Application à l'exemple : pour $f = \frac{f_1 \times f_2}{f_3}$, cela donnerait :

- $\star \mathcal{D}_{f_1} = \dots$
- $\mathcal{D}_{f_2} = \dots$
- $\star \mathcal{D}_{f_3} = \dots$
- $\star f_3(x) = 0 \iff \dots$

Donc $\boxed{\mathcal{D}_f = \dots}$.



$\mathcal{D}_{v \circ u}$ peut sembler n'avoir aucun rapport avec $\mathcal{D}_u$ ni $\mathcal{D}_v$

2) Exemples

- $f(x) = \frac{(3x^2 + 2)\sqrt{x}}{\ln(x)}$