

POLYNÔMES.

Les polynômes sont les fonctions de la forme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Par exemple :

Mais ne sont pas des polynômes.

- Nous nous restreindrons dans ce chapitre aux :
- polynômes de degré 1 : $x \mapsto mx + p$ avec m et p des nombres réels ($m \neq 0$) ;
 - polynômes de degré 2 : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec a , b et c des nombres réels ($a \neq 0$) ;
 - polynômes de degré 3 : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a , b , c et d des nombres réels ($a \neq 0$).

Exemples :



- $f : x \mapsto -2x + 8$ est un polynôme de degré 1
 $f(4) = \dots$: on dit que 4 est une racine de f .
- $g : x \mapsto 3x^2 - 9x - 12$ est un polynôme de degré 2

$g(0) = \dots$	$g(-1) = \dots$	$g(4) = \dots$
$= \dots$	$= \dots$	$= \dots$
	$=$	$=$

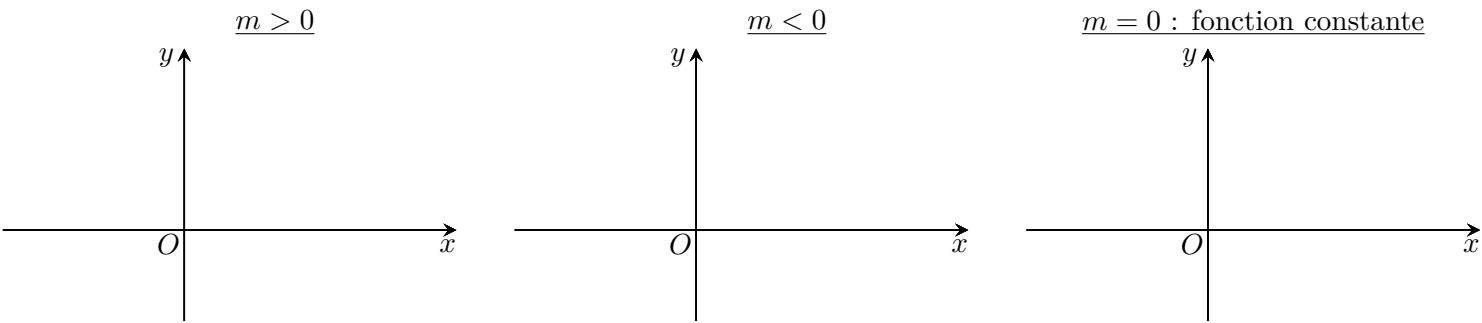
.....

I. Polynômes de degré 1 : fonctions affines $x \mapsto mx + p$

 m est

1) Représentation graphique et signe

La représentation graphique d’une fonction affine est une droite.
Pour une fonction affine $f(x) = mx + p$:



Conclusion : ★ lorsque $m > 0$, la fonction est strictement, le signe est « $- 0 +$ ».
★ lorsque $m < 0$, la fonction est strictement, le signe est « $+ 0 -$ ».
★ lorsque $m = 0$, la fonction affine est, elle est de signe constant.



Rappels : si la courbe d’une fonction affine f passe par $A(x_A, y_A)$ et par $B(x_B, y_B)$, alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;
puis pour trouver p , on utilise la relation $f(x_A) = y_A$ avec $f(x) = mx + p$ (en ayant remplacé le m par sa valeur).

Exemple : $f(x) = 3 - 2x$:

$g(x) = -(2x - 3) + 7x - 11$

2) Racine

Une fonction constante non nulle n'a pas de racine.

Si $m \neq 0$: on note $f(x) = mx + p$, le polynôme a-t-il une ou plusieurs racines ?

Donc f a une seule racine : .

II. Polynômes de degré 2 : $x \mapsto ax^2 + bx + c$

1) Représentation graphique et signe

Propriété.

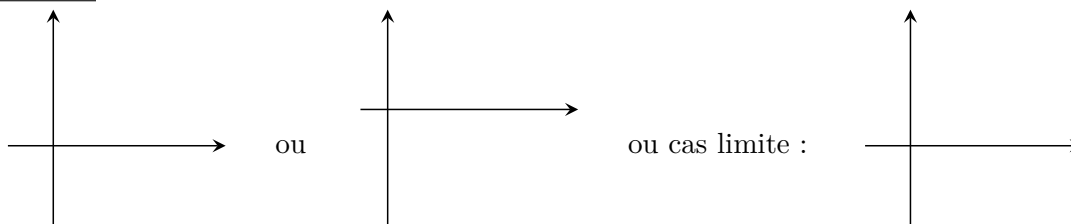
La courbe représentative d'un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole.

Son sommet est en $x = -\frac{b}{2a}$.

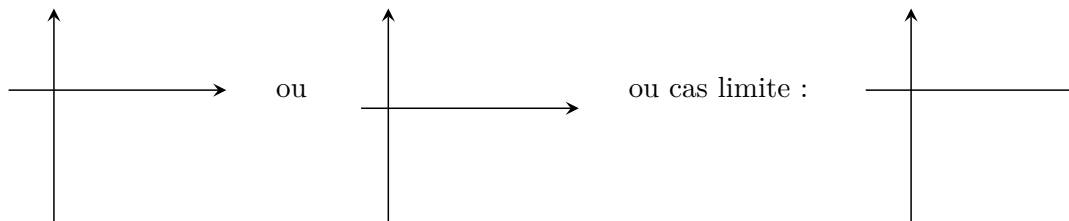
Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut : « $\cup$ ».

Si $a < 0$, elle est tournée vers le bas « $\cap$ ».

Voici tous les cas possibles de courbe (concernant le nombre de racines réelles, le signe, les variations) :
avec $a > 0$:



avec $a < 0$:



Conclusion : un polynôme du second degré a zéro, une ou deux racines.

★ si le polynôme a 0 ou 1 racine, il est de signe constant : celui de a ;

★ si le polynôme a 2 racines : si $a < 0$, les signes sont « $-0 + 0-$ »

si $a > 0$, les signes sont « $+0 - 0+$ »

autrement dit : signe de a à l'extérieur des racines, et du signe opposé entre les racines.

2) Forme canonique et factorisation

Théorème et définitions : différentes formes d'un polynôme.

Soit f un polynôme donné sous sa **forme développée** $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• **forme canonique** : il existe deux réels α et β tels que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$: le point (α, β) est le sommet de la parabole.

• **forme factorisée** :

★ si f a deux racines distinctes r_1 et r_2 , alors $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

★ si f a une unique racine r_1 , alors $f(x) = a(x - r_1)^2$.

★ si les racines de f sont complexes non réelles, il n'y a pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

a. Forme canonique et allure de courbe

La formule générale est complexe, on retiendra la méthode pour y arriver.

Méthode :

1. factoriser les termes en x^2 et x par a ;
2. faire apparaître le début d'une identité remarquable de type $(x - \dots)^2 = x^2 - 2 \times \dots \times x + \dots^2$ et compenser avec $-\dots^2$;
3. factoriser cette identité remarquable et arranger les termes restant.

Exemple : $g(x) = -2x^2 + 6x - 5$

=
=
=
=
=

On peut en déduire l'allure de la courbe :

b. Forme factorisée et racines**Théorème : racines d'un polynôme de degré 2.**

Pour un polynôme $ax^2 + bx + c$, on note $\Delta = b^2 - 4ac$. Ce nombre s'appelle le **discriminant**.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines réelles, notées r_1 et r_2 , que l'on détermine avec les formules

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, le polynôme a une unique racine réelle, elle vaut $r_1 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, le polynôme n'a pas de racine réelle, mais il a deux racines complexes conjuguées, données

par les formules $r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Méthode : pour déterminer les racines éventuelles d'un polynôme du second degré, on commence par identifier les coefficients a , b et c , puis on calcule Δ . Selon sa valeur on calcule sa ou ses racines.

Exemples : déterminer les racines réelles ou complexes des polynômes suivants, et donner la forme factorisée dans $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -4x^2 - 2x + 6$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$h(x) = 2x^2 - 4x + 2$$

3) Relations entre coefficients et racines

Développons l'expression $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$:

$$f(x) =$$

$$=$$

$$=$$

On obtient ainsi : $b = -a(r_1 + r_2)$ et $c = ar_1r_2$.



Exemples d'utilisation :

1. **Trouver la deuxième racine si l'on en connaît une :** $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$.

On peut « deviner » que 1 est racine : $f(1) = 3 + 9 - 12 = 0$.

La deuxième racine r_2 vérifie : $-12 = 3 \times 1 \times r_2$ donc $r_2 = \dots$

2. **Trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit.**

Cherchons deux nombres α et β dont la somme fait $\frac{7}{2}$ et le produit -15 .

Ils sont racines du polynôme $x^2 - \frac{7}{2}x - 15$:

$$\Delta = \dots$$



Méthode : pour trouver deux nombres dont on connaît la somme s et le produit p , on détermine les racines du polynôme $x^2 - sx + p$: ce sont les nombres cherchés.

III. Polynômes de degré 3

Pour des polynômes de degré 3 (ou plus), il n'existe pas de formules analogues au Δ , r_1 , r_2 , on ne peut donc pas factoriser facilement. Le but de cette partie est de voir deux méthodes pour pouvoir factoriser quand même des polynômes de degré trois, à condition de connaître une racine.

Lorsque l'on ne connaît pas de racine, on peut essayer d'en trouver une « évidente » parmi 0, 1, -1, 2, -2 ... (on calcule les images de ces valeurs).



Propriété.

Si r_1 est racine d'un polynôme P , alors P est factorisable par $(x - r_1)$, c'est-à-dire que l'on peut écrire P sous la forme $P(x) = (x - r_1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme.

Le degré de Q est un de moins que le degré de P .

Reste à déterminer les coefficients de Q .

1) Première méthode : par identification des coefficients

Exemple : $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 34x + 30$. P est un polynôme de degré 3, on va chercher toutes ses racines et le factoriser.

$$P(1) =$$

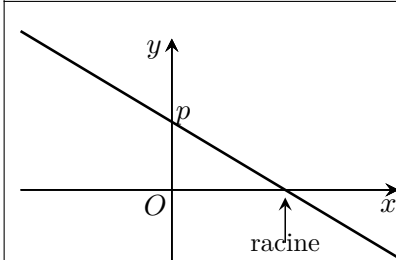
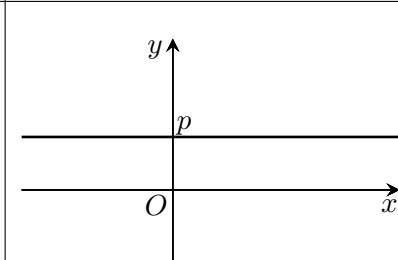
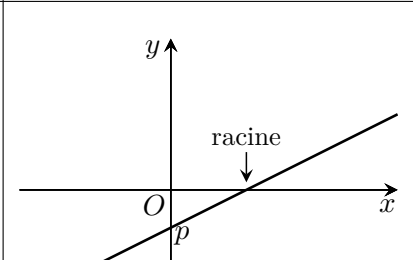
2) Deuxième méthode : par division euclidienne

Cette méthode est basée sur le même principe que la division des nombres entiers.

Remarque : ces deux méthodes s'appliquent aussi à des polynômes de degré 2 dont on connaît une racine.

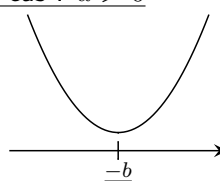
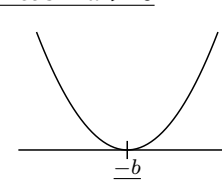
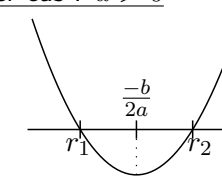
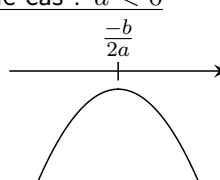
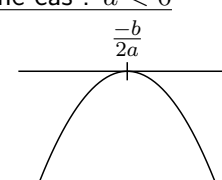
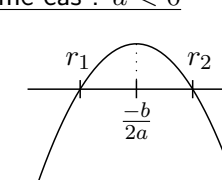
BILAN

Degré 1

$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$																		
																				
<table><tr><td>x</td><td>$-\frac{p}{m}$</td></tr><tr><td>$mx + p$</td><td><table><tr><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table></td></tr></table>	x	$-\frac{p}{m}$	$mx + p$	<table><tr><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	+	0	-	<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>$mx + p$</td><td>signe de p</td></tr></table>	x		$mx + p$	signe de p	<table><tr><td>x</td><td>$-\frac{p}{m}$</td></tr><tr><td>$mx + p$</td><td><table><tr><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table></td></tr></table>	x	$-\frac{p}{m}$	$mx + p$	<table><tr><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	-	0	+
x	$-\frac{p}{m}$																			
$mx + p$	<table><tr><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	+	0	-																
+	0	-																		
x																				
$mx + p$	signe de p																			
x	$-\frac{p}{m}$																			
$mx + p$	<table><tr><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	-	0	+																
-	0	+																		

Degré 2

On note Δ le *discriminant* : $\Delta = b^2 - 4ac$.

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$																						
Racines de P	les racines sont complexes $r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	une seule racine : $r_1 = -\frac{b}{2a}$	deux racines distinctes : $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$																						
Factorisation de $P(x)$	pas de factorisation dans $\mathbb{R}$ ★	$P(x) = a(x - r_1)^2$	$P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$																						
Signe de $P(x)$	<u>1er cas : $a > 0$</u>  <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	+		<u>1er cas : $a > 0$</u>  <table><tr><td>x</td><td colspan="2">$-\frac{b}{2a}$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\frac{b}{2a}$		$P(x)$	+	0	+	<u>1er cas : $a > 0$</u>  <table><tr><td>x</td><td>r_1</td><td>r_2</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	r_1	r_2	$P(x)$	+	0	-	0	+
	x	$-\infty$	$+\infty$																						
$P(x)$	+																								
x	$-\frac{b}{2a}$																								
$P(x)$	+	0	+																						
x	r_1	r_2																							
$P(x)$	+	0	-	0	+																				
	<u>2ème cas : $a < 0$</u>  <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">-</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	-		<u>2ème cas : $a < 0$</u>  <table><tr><td>x</td><td colspan="2">$-\frac{b}{2a}$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\frac{b}{2a}$		$P(x)$	-	0	-	<u>2ème cas : $a < 0$</u>  <table><tr><td>x</td><td>r_1</td><td>r_2</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x	r_1	r_2	$P(x)$	-	0	+	0	-
x	$-\infty$	$+\infty$																							
$P(x)$	-																								
x	$-\frac{b}{2a}$																								
$P(x)$	-	0	-																						
x	r_1	r_2																							
$P(x)$	-	0	+	0	-																				

★ on peut toujours factoriser avec les racines complexes : $P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ mais cela n'est souvent pas utile, par exemple pour l'étude de signe.