

DS1 - MATHS

Correction

Exercice 1.

Q1. (a) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\sin(x+n) = \sin(x) \cos(n) + \cos(x) \sin(n).$$

Puisque $\sin(n)$ et $\cos(n)$ sont des constantes (n est fixé), on en déduit qu'on peut écrire f_n comme combinaison linéaire des fonctions $\sin$ et $\cos$:

$$f_n = \alpha \sin + \beta \cos \quad \text{où } \alpha = \cos(n) \text{ et } \beta = \sin(n)$$

Ainsi, $f_n \in \text{Vect}(\sin, \cos)$.

(b) La question précédente montre que $F \subset \text{Vect}(\sin, \cos)$. La même formule montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x+1) = \sin(x) \cos(1) + \cos(x) \sin(1)$$

et puisque $\sin(1) \neq 0$, on a donc

$$\cos(x) = \frac{1}{\sin(1)} \sin(x+1) + \frac{-\cos(1)}{\sin(1)} \sin(x+0).$$

c'est-à-dire $\cos = \alpha f_1 + \beta f_0$ (où $\alpha = \frac{1}{\sin(1)}$ et $\beta = \frac{-\cos(1)}{\sin(1)}$).

Ceci montre que la fonction $\cos$ est une combinaison linéaire de f_0 et f_1 . Donc, $\cos \in \text{Vect}(f_0, f_1) \subset F$. Puisqu'on a aussi $\sin = f_0 \in F$, on en déduit que $\text{Vect}(\cos, \sin) \subset F$.

Ainsi, par double inclusion, on a bien montré que $F = \text{Vect}(\sin, \cos)$.

Il reste à montrer que $\sin$ et $\cos$ sont linéairement indépendantes.

Soient α et β des réels tels que $\alpha \cos + \beta \sin = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = 0$. En particulier pour $x = 0$, on trouve $\alpha = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$.

Ainsi, $\sin$ et $\cos$ forment une famille libre. $(\sin, \cos)$ est donc une base de F .

Q2. Tentons d'écrire $\cos^2 = \alpha \sin + \beta \cos$, avec α et β des réels à déterminer, s'ils existent. Dans ce cas, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x)$.

Or pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\alpha = 0$. La relation devient donc $\cos^2(x) = \beta \cos(x)$.

Mais c'est absurde car le membre de gauche est toujours positif alors que le membre de droite change de signe.

Les réels α et β ne peuvent donc pas exister. Conclusion, $h \notin F$.

Q3. (a) Soit $g \in F$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $g = \alpha \sin + \beta \cos$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x + 2\pi) = \alpha \sin(x + 2\pi) + \beta \cos(x + 2\pi) = \alpha \sin(x) + \beta \cos(x) = g(x).$$

la fonction g est donc bien 2π -periodique. Donc, tout élément de F est 2π -périodique.

(b) La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction h est 2π -periodique mais n'est pas dans F .

Exercice 2.

Q4. f_n est une fonction polynôme donc continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. On a alors $f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x$. Puisque $x > 0$, on remarque que f_n' est strictement positive et donc que f_n est strictement croissante.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. f_n réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ dans $] -4, +\infty[$. il existe donc un et un seul réel $u_n > 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

Q5. $f_1(x) = x + 9x^2 - 4$. C'est un polynôme de degré deux.

Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times 9 \times 4 = 145 > 0$. On a donc deux solutions sur $\mathbb{R}$. Puisqu'on sait, d'après la question précédente, qu'il n'y en a qu'une seule positive, on ne va écrire que celle-là :

$$u_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18}.$$

Q6. Par définition de u_n et u_{n+1} , on a $f_n(u_n) = f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.

Q7. Calculons

$$f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0.$$

Puisque la fonction f_n est strictement croissante et $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que

$$u_n < \frac{2}{3}.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -4$, donc $u_n > 0$.

Q8. Soit $x \in]0, 1[$, on a $0 < x < 1$ donc $x^{n+1} < x^n$ et donc $x^{n+1} + 9x^2 - 4 < x^n + 9x^2 - 4$, c'est-à-dire $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

Q9. Soit $n > 0$. Puisque $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, la question précédente montre que $f_n(u_{n+1}) > 0$ et donc le même argument que la question Q7. prouve que $u_n < u_{n+1}$.

La suite (u_n) est donc croissante.

Q10. D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est une suite croissante et majorée par $\frac{2}{3}$. Donc $(u_n)_n$ converge.

Q11. D'après la question Q7., on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < \frac{2}{3}$.

On a donc $0 < u_n^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Or, puisque $\frac{2}{3} < 1$, il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Par encadrement, on a alors que la suite $(u_n^n)_n$ admet une limite et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0.$$

Q12. D'après la définition de u_n , on a

$$u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient que $9\alpha^2 - 4 = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

(on a choisit la racine positive du carré car on sait que $\alpha \geq 0$).

Exercice 3.

Q13. On cherche à montrer que $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ est stable par f , c'est-à-dire que pour tout $u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$, $f(u) \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$.

Soit $u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$. On note $w = f(u)$. On cherche donc à montrer que $w \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$.

$$(f - \lambda \text{id}_E)(w) = f(w) - \lambda w = f(w) - \lambda f(u) = f(w - \lambda u)$$

Or, $w - \lambda u = f(u) - \lambda u = (f - \lambda \text{id}_E)(u) = 0$ car $u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$. Ainsi, $(f - \lambda \text{id}_E)(w) = f(0) = 0$, c'est-à-dire $f(u) = w \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$.

$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$ est donc stable par f .

Q14. Soit $u = (x; y; z)$ un vecteur de E , exprimé dans la base $\mathcal{C}$. Ce vecteur est dans F si et seulement si $f(u) = u$.

$$\begin{aligned} f(u) = u &\iff \begin{cases} 2y - z = x \\ 2x - 5y + 4z = y \\ 3x - 8y + 6z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2y - z \\ (4y - 2z) - 5y + 4z - y = 0 \\ (6y - 3z) - 8y + 6z - z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2=L_3}{\iff} \begin{cases} x = 2y - z \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z \end{aligned}$$

On en déduit que $F = \text{Vect}(e_1)$.

Q15. On cherche le rang de la matrice des colonnes issues de e_2 , e_3 et e_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit donc que cette dernière matrice est de rang 2. Les vecteurs e_2 , e_3 , e_4 sont donc liés. Par contre, e_2 et e_3 sont libres car non proportionnels.

On a donc que (e_2, e_3) est une base de G et la dimension de G est 2.

Q16. Pour que la somme soit directe, il suffit donc de vérifier que $F \cap G = \{0\}$ et pour cela, il suffit de vérifier que $e_1 \notin G$.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe α, β des réels tels que $e_1 = \alpha e_2 + \beta e_3$. ceci se

traduit par le système $\begin{cases} 1 = \alpha - \beta \\ 1 = \alpha \\ 1 = \beta \end{cases}$. Il est clairement incompatible. ce qui démontre

que α et β ne peuvent pas exister.

Ainsi, $F \cap G = \{0\}$ et la somme est donc bien directe : $F \oplus G$.

Maintenant, en terme de dimension, on a bien $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ et donc

$$\boxed{E = F \oplus G.}$$

Pour finir, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une famille constituée de la réunion d'une base de F et d'une base de G , $\mathcal{B}$ est donc une base adaptée à la somme directe.

Q17. Pour écrire la matrice dans $\mathcal{B}$, il faut calculer et écrire $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Les questions Q13. et Q14. permettent de montrer que $f(e_1) = e_1$.

Pour $f(e_2)$, on commence par le calculer dans la base $\mathcal{C}$, $AQ = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$. On a donc

$f(e_2) = e_4 \in G$. On cherche donc α, β tels que $e_4 = \alpha e_2 + \beta e_3$. Sur la deuxième coordonnée, on voit que $\alpha = -3$ et sur la troisième coordonnée $\beta = -5$. On vérifie que $\alpha - \beta = 2$. Ainsi, on a $f(e_2) = -3e_2 - 5e_3$.

Pour $f(e_3)$, on utilise le même principe : $AR = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On cherche alors α, β et γ tels

que $f(e_3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = -1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \gamma = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = -1 \\ \gamma = 3 \\ \alpha + \gamma = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

Ainsi $f(e_3) = 2e_2 + 3e_3$.

Conclusion, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$

Q18. Effectivement, le calcul matriciel montre bien que $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On reconnaît une matrice d'une symétrie. Pour vérifier, on calcule $(B^2)^2 = I_3$. D'après la matrice B , g est la symétrie par rapport à F , parallèlement à G .

Exercice 4.

On ne peut répondre entièrement qu'aux questions Q24 et Q26 et répondre partiellement à la question Q31.

Q24 w est un polynôme donc continue sur $[0, 1]$. Cet intervalle est fermé borné donc w est bornée et atteint ses bornes. Pour déterminer son maximum, on étudie la fonction. w est dérivable. Puisque $w(t) = t - t^2$, on a $w'(t) = 1 - 2t$.

On a $w'(t) \geq 0$ ssi $1 - 2t \geq 0$ ssi $t \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, w est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Le maximum de w est donc atteint en $\frac{1}{2}$.

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Q26 Notons H une primitive de la fonction $s \mapsto f(s)e^{-s}$. On a

$$g(t) = \int_0^t f(s)e^{-s} ds = \left[H(s) \right]_0^t = H(t) - H(0)$$

g est donc dérivable et $g'(t) = H'(t) = f(t)e^{-t}$.

Q31 On ne sait pas comment montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \varphi(u)u^n du$. On admet donc cette partie.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il s'écrit $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$. On a alors

$$\int_0^1 P(t)\varphi(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k \int_0^1 t^k \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k \times 0 = 0$$