

ENSEMBLES

Georg Cantor (1845 - 1918) est à l'origine de la théorie des ensembles. Il a notamment construit l'ensemble des réels à partir des rationnels, construction formalisée par Richard Dedekin (1831 - 1916). La théorie des ensembles donne lieu à de multiples questions tortueuses, voire des paradoxes.

Le plus célèbre des paradoxes est probablement le paradoxe de Russel (Bertrand Russel, 1872 - 1970), qui peut se traduire en langage imagé par : le barbier d'un village rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes ; le barbier doit-il se raser ?

Un **ensemble** E est une collection d'objets. Chaque objet de E est appelé **élément** de E .
On note $x \in E$ si l'élément x **appartient** à E , et $x \notin E$ dans le cas contraire.

I. Notations des ensembles

On note en général les ensembles avec des accolades $\{ \dots \}$ qui se lisent « ensemble de ... », et à l'intérieur, la description des éléments de l'ensemble, cette description peut prendre plusieurs formes :

- la liste des éléments qui le constituent, par exemple :
 $E = \{3; -7; 49\}$ « E est l'ensemble constitué des éléments 3, -7 et 49 ».
 $\mathbb{N} = \{ \dots \}$
- une propriété caractéristique des éléments (on dit qu'il est défini **par compréhension**), par exemple :

$F = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n^2+3} \leq 10^{-5} \right\}$ « F est l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient l'inégalité $\frac{1}{n^2+3} \leq 10^{-5}$ »

- la forme des éléments qui le constituent (on parle d'**image directe**), par exemple :

$G = \{2p, p \in \mathbb{N}\}$ « G est l'ensemble des nombres $2p$ obtenus lorsque p décrit l'ensemble des entiers naturels »
c'est une écriture plus concise que $G = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{il existe } p \in \mathbb{N}, n = 2p\}$ « G est l'ensemble ... »

On dispose aussi d'écritures spécifiques pour les intervalles :

- $[a, b] = \dots$
- $\llbracket a, b \rrbracket = \dots$
- $\mathbb{R}^* = \dots$
- $\mathbb{N}^* = \dots$

On rappelle que l'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé **ensemble vide**, et il se note $\emptyset$.
Ainsi, $\emptyset = \{ \}$.

Définition.

Soient A et E des ensembles.
On dit que A est **une partie de** E , ou que A est un **sous-ensemble** de E si et seulement si tout élément de A appartient à E :

$$A \text{ est une partie de } E \text{ si et seulement si } x \in A \Rightarrow x \in E$$

Si A est une partie de E , on note $A \subset E$ « A est inclus dans E ».
L'**ensemble de toutes les parties** de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarques de notation : « A est une partie de E » se note $A \subset E$ mais aussi $A \in \mathcal{P}(E)$.
Et si x est un élément de l'ensemble A , on note $x \in A$ ou $\{x\} \subset A$.

Exemple : si $E = \{a; b; c\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{ \dots$



Méthode : pour montrer qu'un ensemble A est une partie de E , on montre que si un élément x est dans A , alors il est aussi dans E : « soit $x \in A$, [...] donc $x \in E$ ».

Exemple : si $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -2\}$ et $B = \{n - 1, n \in \mathbb{N}\}$, montrons que $\dots \subset \dots$.

Propriété.

Soient E et F deux ensembles.

Alors : $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.



Méthode : pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut procéder par **double-inclusion** :

★ on montre que $A \subset B$: « Soit x dans A , montrons que x est dans B »

★ on montre que $B \subset A$: « »

Voir **Exercices 4.** et **5.** (et **6.**).

II. Opérations sur les ensembles

Définition.

Si E est un ensemble, et A et B sont deux parties de E , on peut définir de nouvelles parties de E :

- la **réunion de A et B** , notée $A \cup B$: c'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B , $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
Le *ou* est inclusif : les éléments à la fois dans A et B sont dans la réunion.
- l'**intersection de A et B** , notée $A \cap B$: c'est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B :
 $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
Deux ensembles sont **disjoints** si leur intersection est vide.
- le **complémentaire de A dans E** , noté A^c ou $E \setminus A$ ou $\overline{A}$:
c'est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A ,
 $A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Remarque : la notation $\setminus$ s'utilise aussi plus généralement : $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Exemples : on travaille dans $E = \mathbb{R}$:

$$[0; 2] \cap]1; 3] = \quad [0; 2] \cup]1; 3] = \quad \overline{[0; 2]} = \quad [0; 2] \setminus]1; 3] =$$

Propriété. Règles de calcul.

Soit E un ensemble et A , B et C trois parties de cet ensemble.

- commutativité : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$;
- associativité : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ noté $A \cap B \cap C$ (.....)
 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ noté $A \cup B \cup C$;
- distributivité : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- lois de De Morgan : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exemples :

1. Résoudre $2 \cos(3x) = \sqrt{3}$ et décrire avec les notations précédentes, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions.
2. Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geqslant 0\}$.
Écrire A et B sous forme d'intervalles ou union d'intervalles.
Puis exprimer $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$ et $A \cup B$.

Définition. Produit cartésien de deux ensembles.

Soient E et F deux ensembles.
Le **produit cartésien de E par F** , noté $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$,
 $E \times F = \{(x; y), x \in E \text{ et } y \in F\}$.
On note $E^2 = E \times E$.

Remarque : $E \times F$ se lit « E croix F », et E^2 se lit aussi « E au carré ».

Exemples : $E = \{2; 4; 11\}$ et $F = \{-1; \pi\}$, alors $E \times F = \dots\dots\dots$
 $\mathbb{R}^2 \dots\dots\dots$
 $\{1; 4\} \times \{a, b, c\} = \dots\dots\dots$

Définition. Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.

Soient $E_1, E_2, \dots E_n$ des ensembles.
On définit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots x_n \in E_n\}$.
 $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est appelé le produit cartésien de $E_1, E_2, \dots E_n$.

On note $E^p = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$ et un élément de E^p est appelé un ***p-uplet*** ou une ***p-liste*** d'éléments de E .

Attention : $(2; 3) \neq (3; 2)$ mais $\{2; 3\} = \{3; 2\}$.