

## CORRIGÉ DU DM N°3

**Correction 1.**

$$\bullet f(t) : A = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

On cherche  $\varphi$  tel que  $\cos(\varphi) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin(\varphi) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Donc on peut prendre  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ .

Ainsi,  $\boxed{f(t) = 2\sqrt{2} \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)}$ .

$$\bullet g(t) : A = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

On cherche  $\varphi$  tel que  $\cos(\varphi) = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ .

On peut prendre  $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ , on obtient alors  $\boxed{g(t) = 2\sqrt{3} \cos\left(t - \frac{5\pi}{6}\right)}$ .

**Correction 2.**

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\ &= \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\ &= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\ &= \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)}{\cos(a)} \times \frac{\sin(b)}{\cos(b)}} \\ &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

**Correction 3.**

$$1. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}.$$

Or les côtés sont tous de même mesure donc les triangles  $ABC$  et  $ABD$  sont équilatéraux, donc

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$  et  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$  mesurent  $\frac{\pi}{3}$ .

Donc  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

Donc  $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont orthogonaux.}}$

2. (a) D'après la relation  $(\star)$  et la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}.$$

$$\text{Soit } 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } -4\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})}.$$

$$(b) \overrightarrow{AG}^2 = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG}$$

$$= \frac{1}{16} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{16} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})$$

De même qu'en 1., les angles des faces font tous  $\frac{\pi}{3}$  et les côtés sont de longueur 1.

$$\text{Donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$$

$$\text{et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \overrightarrow{AG}^2 &= \frac{1}{16} \left( 1 + 1 + 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{16} \times 6 \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } AG = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

(c) Le même raisonnement est aussi vrai avec les points  $B$ ,  $C$  et  $D$ , car comme le tétraèdre est régulier, tous les points jouent tous le même rôle, donc  $BG = CG = DG = \sqrt{\frac{3}{8}}$ .

$$\begin{aligned} 3. \quad \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} &= \frac{1}{16} \left( \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left( \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} \right) \\ &= \frac{1}{16} \left( -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \right. \\ &\quad \left. - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} \right) \end{aligned}$$

Or, les triangles des faces sont équilatéraux, donc l'angle entre deux vecteurs qui ont un point commun est  $\frac{\pi}{3}$ , donc par exemple  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times 1 \times \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ , et les côtés opposés sont orthogonaux donc  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$  et  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ , donc :

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{1}{16} \left( -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

Or  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \times GB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}})$  donc  $-\frac{1}{8} = \frac{3}{8} \times \cos(\widehat{\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}})$ .

Donc  $\cos(\widehat{\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}}) = -\frac{1}{3}$  donc puisque l'angle n'est pas orienté,  $\widehat{(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})} \approx 109^\circ$ .